協力ゲームの課題

プレイヤーの話し合いにより,

１　どのような協力関係（提携）が形成されるか　？

２　形成された提携内でどのように利得を分配するか　？

表現形式　：　特性関数形（提携形）

特性関数形ゲーム

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ ： プレイヤーの集合

$S \subseteq N$ ： 提携

$v : 2^N \to \Re$ ： 特性関数 （TUーゲーム）

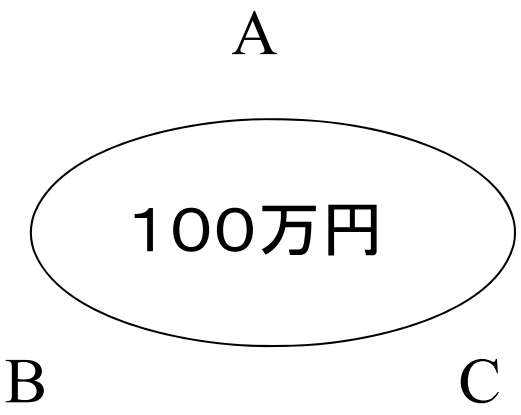
（ 2^N ： N の部分集合の全体， $\Re$ ：実数の全体 ）

$v(S)$ ：提携 S のメンバーが協力したときに N－S の行動にかかわらず必ず得られる値の最大値

ただし， $v(\varnothing) = 0$ （$\varnothing$ は空集合）

(N, v) ： 特性関数形ゲーム（提携形ゲーム）

事例６－１



４つの案

１　A，B　で分ける

２　A，C　で分ける

３　B，C　で分ける

４　A，B，C　で分ける

（もう一度話し合う）

A, B, C それぞれ１票ずつを投票

過半数（２票以上）を得た案を実施

A，B，C　の間でどのような協力関係ができ，100万円をどのように分け合うか　？

事例６－１の特性関数形ゲーム表現

プレイヤーの集合　$N = \{A, B, C\}$

特性関数

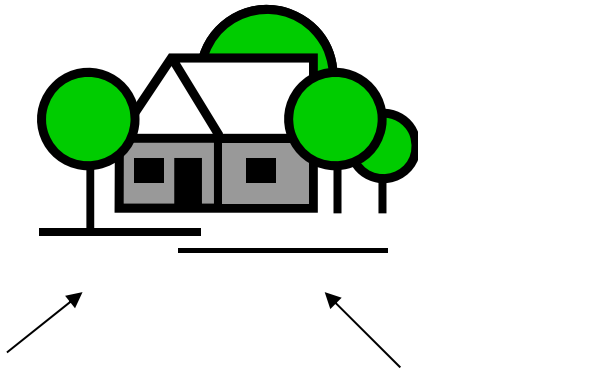
$$v(\{A,B,C\}) = 1,$$

$$v(\{A,B\}) = v(\{A,C\}) = v(\{B,C\}) = 1,$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

事例６－２

A　1000万円



B
1200万円

C
1500万円

C の評価　1500万円

B の評価　1200万円

A の評価　1000万円

A の家は B, C のどちらにいくらの価格で売られるか　？

事例６－２の特性関数形ゲーム

C の評価　１５００万円

B の評価　１２００万円

A の評価　１０００万円

プレイヤーの集合　$N = \{A, B, C\}$

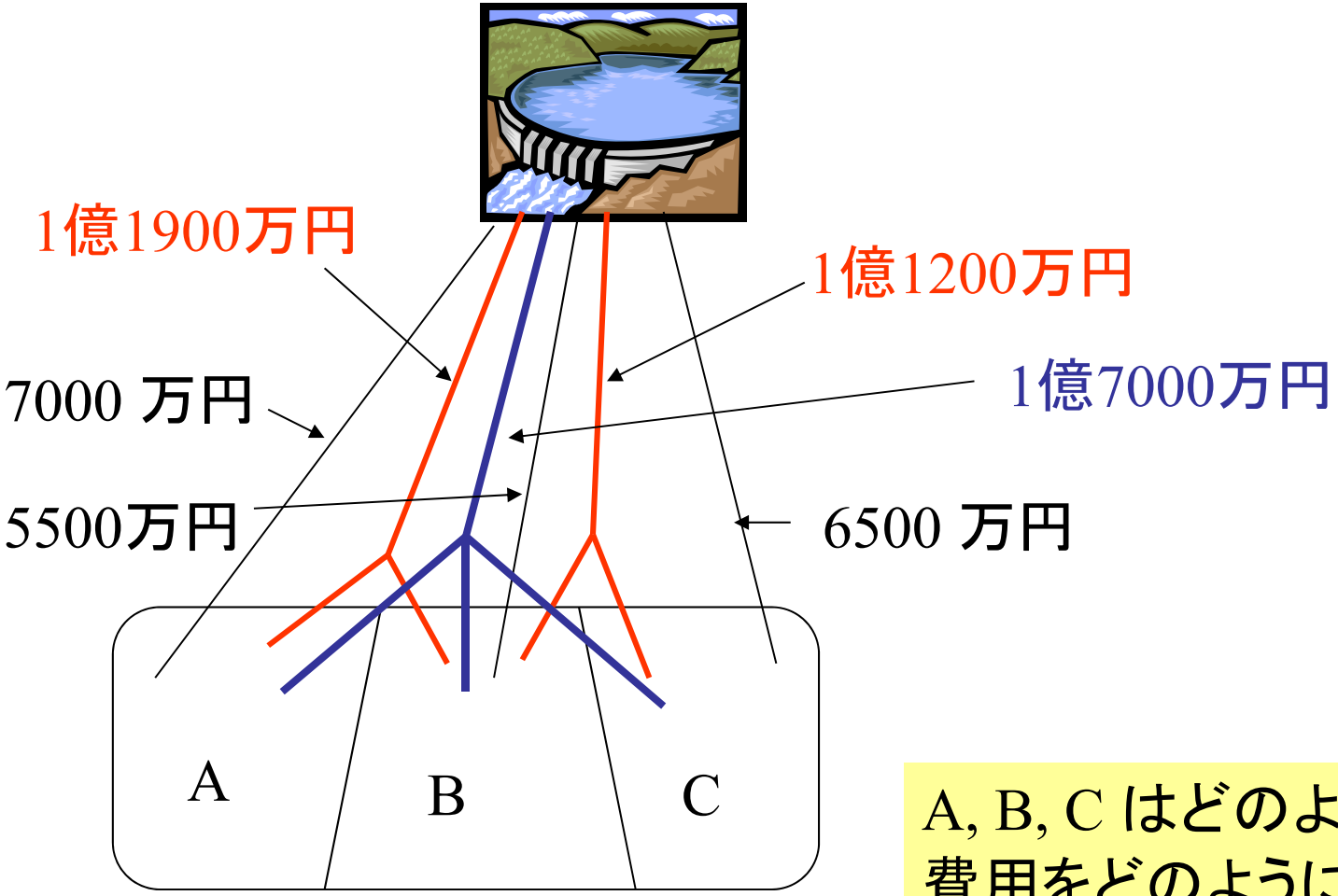
特性関数

$$v(\{A,B,C\}) = 5,$$

$$v(\{A,B\}) = 2,\ \ v(\{A,C\}) = 5,\ \ v(\{B,C\}) = 0,$$

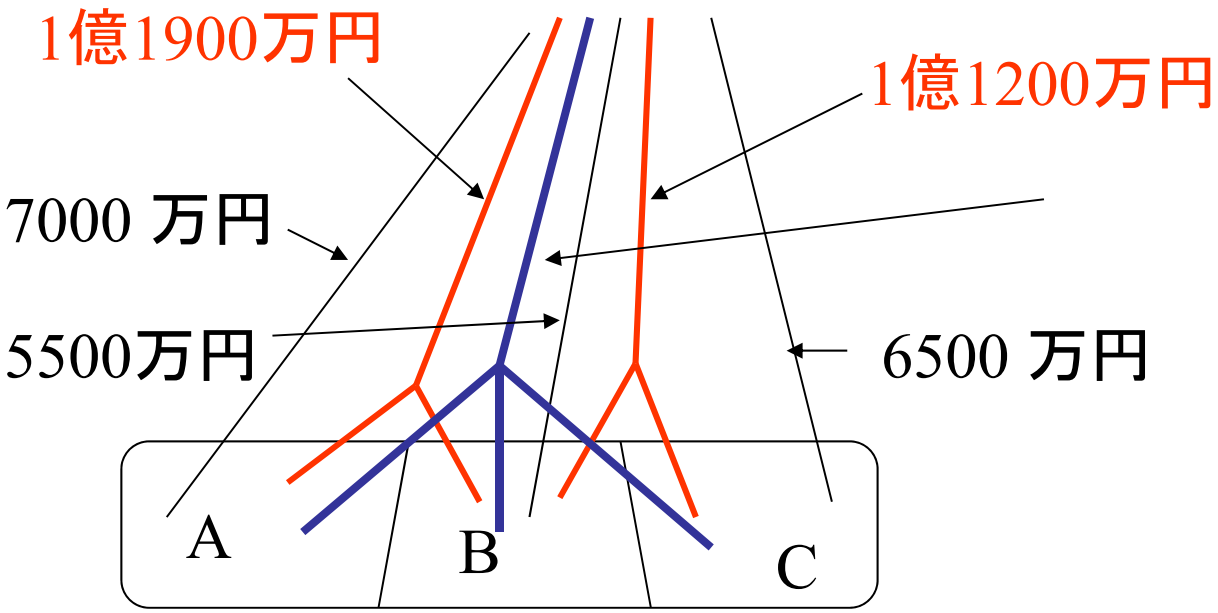
$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

事例６－３



A, B, C はどのように協力し，費用をどのように分担するか　？

事例６－３の特性関数形ゲーム



プレイヤーの集合　N = {A, B, C}

特性関数　（費用の軽減分）

$$v(\{A,B,C\}) = 20,$$

$$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

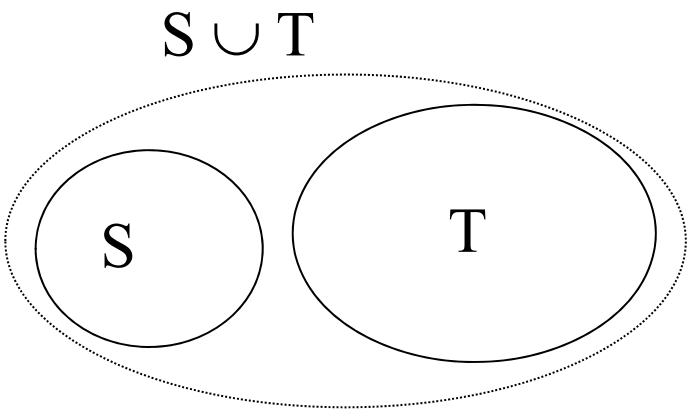
優加法性

優加法性

特性関数形ゲーム (N, v) が優加法的

$\Leftrightarrow$ $S \cap T = \emptyset$ となる任意の提携 S, T に対して,

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$



事例６－３の特性関数の優加法性

事例６－３の特性関数

$$v(\{A,B,C\}) = 20,$$

$$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

$$v(\{A,B\}) = 6 > 0 = v(\{A\}) + v(\{B\})$$

$$v(\{A,B,C\}) = 20 > 6 = v(\{A,B\}) + v(\{C\})$$

$$v(\{A,C\}) \geqq v(\{A\}) + v(\{C\}),\ \ v(\{A,C\}) \geqq v(\{A\}) + v(\{C\})$$

$$v(\{A,B,C\}) \geqq v(\{A,C\}) + v(\{B\})$$

$$v(\{A,B,C\}) \geqq v(\{A,C\}) + v(\{B\})$$ ？？？

優加法性と全員提携の形成

優加法性

→　提携の規模は大きくなり，全員提携が形成されると考えられる

協力ゲームの課題

１　どのような協力関係（提携）が形成されるか　？

→　全員提携の形成を前提

２　全員提携内でどのように利得を分配するか　？

→　これまでの協力ゲームの研究

↓

最近になって提携形成の研究が盛んになる

配分

全員提携の中でどのように利得を分配するか　？

利得ベクトル　：　$x = (x_1, x_2, , \ldots , x_n)$

x_i　：　プレイヤー i の利得

利得ベクトル　：　$x = (x_1, x_2, , \ldots , x_n)$　が配分

1　$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = v(N)$

2　$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots , n$

1　全体合理性，　2　個人合理性

事例６－３の配分

$N = \{A, B, C\}$

$v(\{A,B,C\}) = 20,$

$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ \ v(\{B,C\}) = 8,$

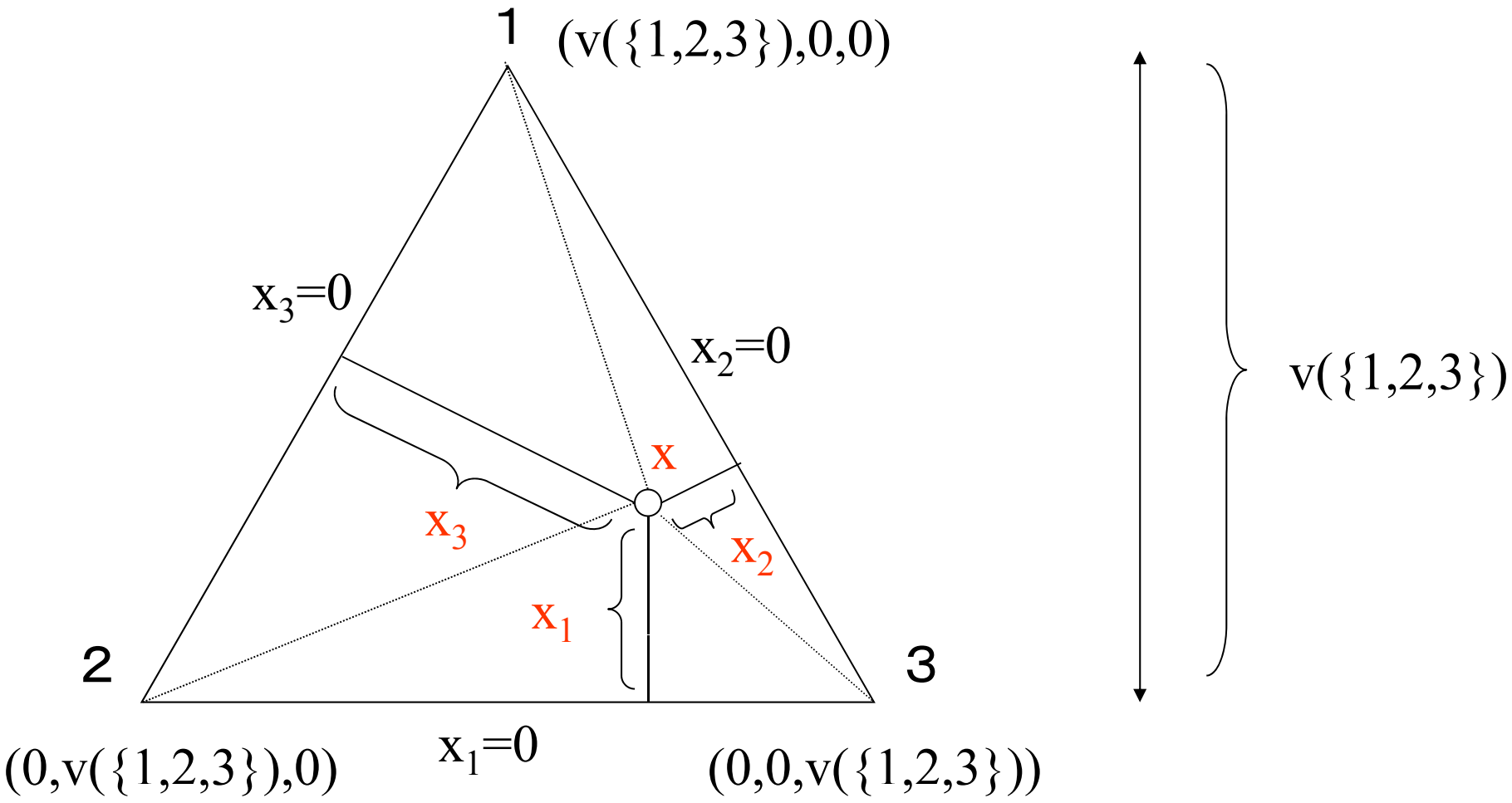
$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

配分の集合

$$A = \{x = (x_A, x_B, x_C) \mid x_A + x_B + x_C = 20,\quad x_A,\ x_B,\ x_C \geq 0\}$$

事例6－1，6－2の配分の集合は？

３人ゲームの配分の図示



コ　ア

配分の集合

$$A = \{x=(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N),\quad x_i \geq v(\{i\})\ \ \forall i\in N\}$$

コア　$$C = \{x=(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N),\quad x_i \geq v(\{i\})\ \ \forall i\in N$$

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)\ \ \forall S\subseteq N\ \}$$

↑

提携合理性

配分 x に対する提携 S の不満　　$e(S, x) = v(S) - \sum_{i\in S} x_i$

コア　$$C = \{x=(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N),\quad x_i \geq v(\{i\})\ \ \forall i\in N$$

$$e(S, x) \leq 0\ \ \forall S\subseteq N\ \}$$

事例６－１のコア

特性関数　$v(\{A,B,C\}) = 1,$

$v(\{A,B\}) = v(\{A,C\}) = v(\{B,C\}) = 1,$

$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

コア　$C = \{x=(x_A,x_B,x_C) \mid x_A+x_B+x_C=1,\ x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,$

$x_A+x_B \geq 1,\ x_A+x_C \geq 1,\ x_B+x_C \geq 1\ \}$

$x_A+x_B \geq 1,\ x_A+x_C \geq 1,\ x_B+x_C \geq 1 \ \rightarrow\ x_A+x_B+x_C \geq 3/2$

$\rightarrow\ x_A+x_B+x_C=1$ に矛盾

↓

コア　$C = \varnothing$

事例６－２のコア

特性関数　$v(\{A,B,C\}) = 5,$

$v(\{A,B\}) = 2,\ \ v(\{A,C\}) = 5,\ \ v(\{B,C\}) = 0,$

$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

コア　$C = \{x=(x_A,x_B,x_C) \mid x_A+x_B+x_C=5,\ x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,$

$x_A+x_B \geq 2,\ x_A+x_C \geq 5,\ x_B+x_C \geq 0\ \}$

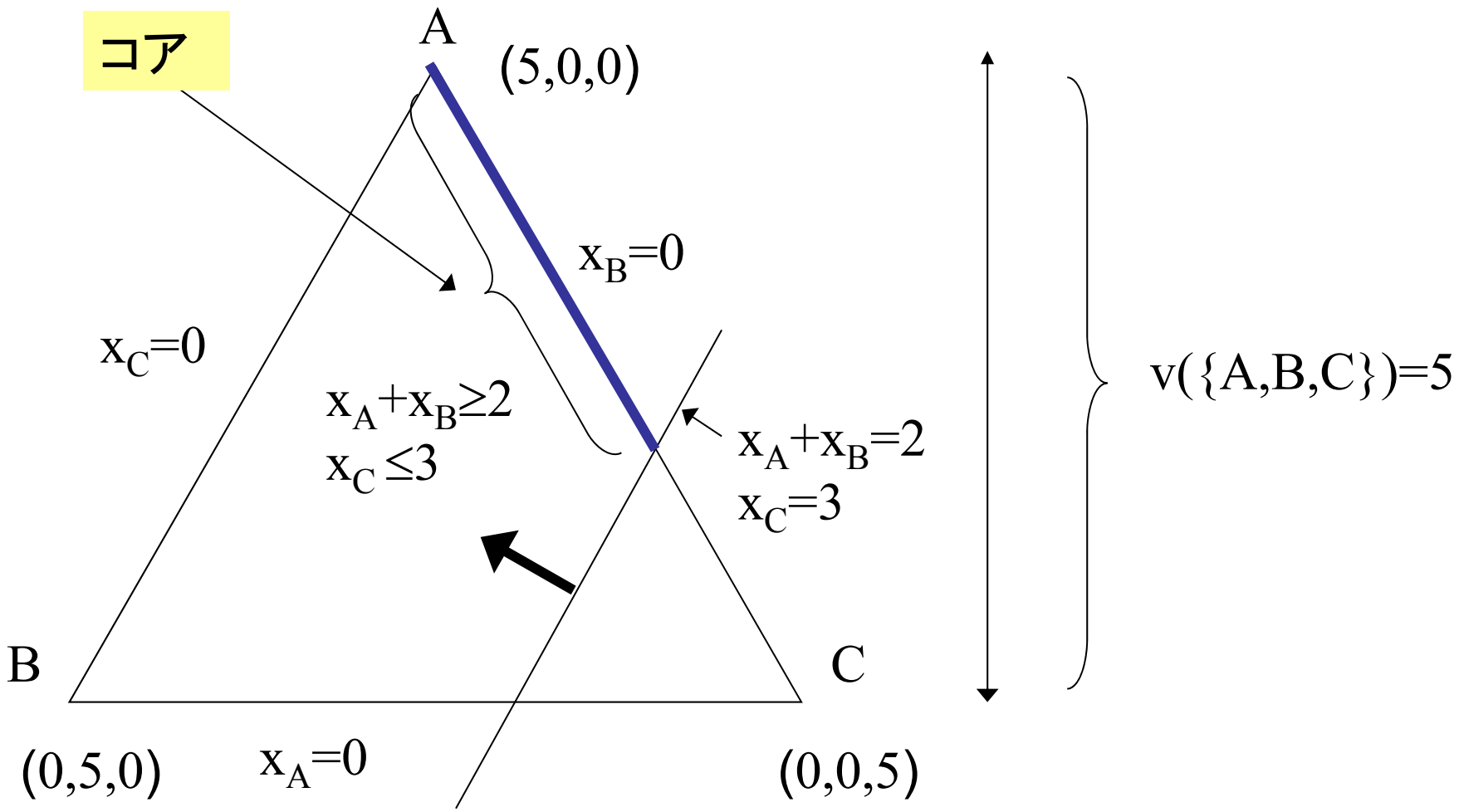
$\downarrow$

$x_A + x_C = 5\ (x_B = 0),\ \ x_A \geq 2$

$x_B = 0$ → A と C の間で売買

$x_A \geq 2\ \ (x_C \leq 3)$ → １２００万円以上の価格で売買

事例６－２のコアの図示


コア
A
(5,0,0)
$x_B=0$
$x_C=0$
$x_A+x_B\geq 2$
$x_C\leq 3$
$x_A+x_B=2$
$x_C=3$
v({A,B,C})=5
B
C
(0,5,0)
$x_A=0$
(0,0,5)

事例６－３のコア

特性関数　$v(\{A,B,C\}) = 20,$

$v(\{A,B\}) = 6,\ \ v(\{A,C\}) = 0,\ \ v(\{B,C\}) = 8,$

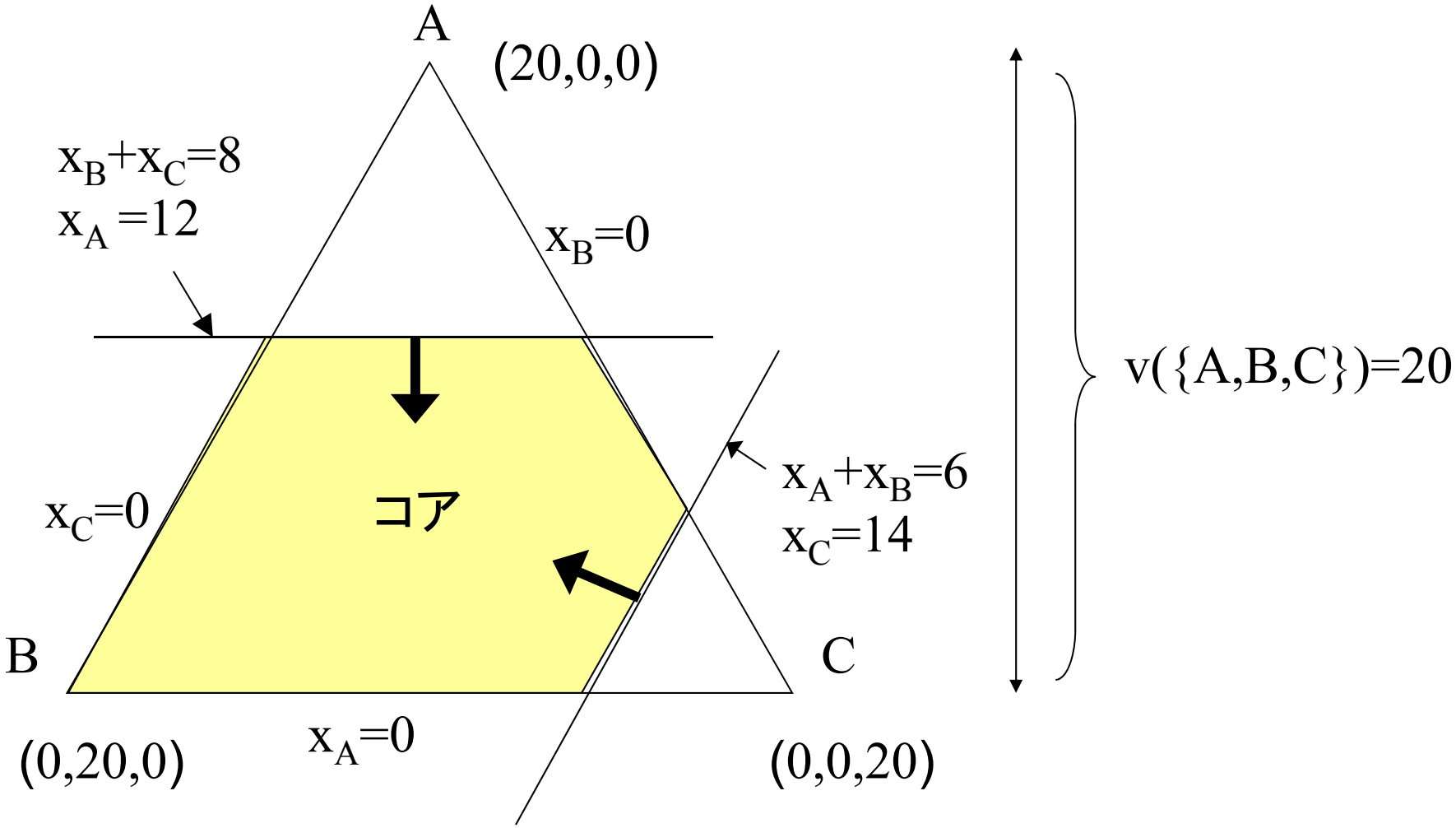
$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

コア　$C = \{x=(x_A,x_B,x_C) \mid x_A+x_B+x_C=20,\ x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,$

$x_A+x_B \geq 6,\ x_A+x_C \geq 0,\ x_B+x_C \geq 8\ \}$

大きなコア　→　(0,20,0), (6,0,14)　などを含む

事例６－３のコアの図示


A
(20,0,0)
$x_B+x_C=8$
$x_A=12$
$x_B=0$
$x_C=0$
コア
$x_A+x_B=6$
$x_C=14$
B
C
(0,20,0)
$x_A=0$
(0,0,20)
v({A,B,C})=20

コアの利点と問題点

利点： 意味がとらえやすい

どの提携にも不満を与えない

問題点： 空集合になることがある

大きな集合になることがある

コアの考え方を活かしながら，

常に非空で，あまり大きな集合にならないものは ？

→ 仁

次回までの課題

Reading assignment

テキスト　第VI章　（１８０ページ～１９４ページ）

Homework（次回レポートとして提出）

練習問題１の ５，６　（コアに関する部分）