ケーリッシュ＝モンターギュ命題論理体系の完全性と健全性

東　克明

以下で、ケーリッシュとモンターギュの命題論理演繹体系の健全性と完全性、およびその帰結を概観する[*1]この体系は、東京工業大学における著者の講義「論理学第一」で使用しているものである。

いくつかの前提から結論を得ることを**議論**という。議論の正否を判定する二つの方法がある。一つは、前提から結論を演繹できるのか否かによって議論の正否を判定する方法であり、これを**統語論的方法**という。第一章では、統語論的方法について重要事項を確認する。

もう一つは、真理表を用いて、すべての前提が真であるときに結論も必ず真となるのか、によって議論の正否を判定する方法であり、これを**意味論的方法**という。第二章では、意味論的方法の基本事項を確認する。

このように、議論の正否を判定する二つの方法があるが、それらの判定にずれが生じることはないのだろうか？すなわち、ある議論は一方の方法では正しいと判定されるが、他方の方法では正しくないと判定される、そのようなことはないのだろうか？第三章では、この問いに解答を与える。統語論的方法において正しい議論は意味論的方法においても正しいこと、さらにはその逆、すなわち意味論的方法において正しい議論は統語論的方法においても正しいことが、示される。前者は、演繹体系の**健全性**と呼ばれる。演繹体系を用いて前提から結論を演繹できる議論は、真理表を用いた方法でも正しいと判定されるので、そのような演繹体系は何らかの奇妙な議論を正しいと判定せず健全である、ということだ。後者は、演繹体系の**完全性**と呼ばれる。意味論的方法において正しいと判定される議論はすべて、演繹体系を用いて前提から結論を導出できるので、演繹体系に穴はなく完全であるということだ。

最後に第４章では、完全性と健全性から帰結することを述べる。

1　統語論的方法

講義では演繹が従うべき諸規則をインフォーマルな形で紹介した。ここでは、「演繹」や「完成した演繹」、「演繹可能」といった諸概念を、もう少しフォーマルに定義しておきたい。ただし、「記号文」、「前提」、「行の正当化」、「箱入れ」、「箱入れの正当化」、「Show Line」、「打消し」、「推論規則」といった諸概念は、講義ですでに定義ずみとして使用する。

演繹とは次の６つの規則に従い構成されるものである[*2]。

1. ϕ が記号文であるとき、ある行に “$Show\,\phi$” と表記してよい。
2. 「前提」の記号文を、ある行に表記してよい。（ただし、その際、「行の正当化」に “Pr” と表記すること。）

[*1] 彼らの命題論理体系は、彼らの論理学の教科書 [Donald Kalish, Richard Montague, and Gary Mar *Logic: Techniques of Formal Reasoning* . 2nd ed. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1980] において詳述されている。ただし、この教科書には、完全性と健全性の証明は書かれていない。

[*2] これから述べる諸規則と諸定義は、ケーリッシュとモンターギュの教科書（本稿 1 頁注 2 参照）の 24・25 ページにおける記述を、講義で述べたことに合わせて少し改訂したものである。

3. 記号文 ϕ と ψ を用いた "$Show\,\phi \to \psi$" という行があるとき、その次の行に "ϕ" と表記してよい。（ただし、その際、「行の正当化」に "$Ass\,CD$" と表記すること。）
4. 記号文 ϕ を用いた "$Show\,\phi$" という行があるとき、その次の行に "$\sim \phi$" と表記してよい。また、記号文 ϕ を用いた "$Show\ \sim \phi$" という行があるとき、その次の行に "ϕ" と表記してよい。（ただし、それらの場合には、「行の正当化」に "$Ass\,ID$" と表記すること。）
5. ある記号文が、それより前の利用可能な行（すなわち、それより前にある行から、「打ち消し」されていない「Show Line」を含む行と、「箱入れ」された行を除いた行）からある「推論規則」を用いて導出されるとき、その導出された記号文を行に表記してよい。（ただし、その際、利用した記号文の行番号と推論規則を「行の正当化」に表記すること。）
6. 次のような行の配列があり、$n+1$ 行目から $n+m$ 行目までに「打消し」されていない「Show Line」を含まないとする。

$$\begin{array}{lll} \vdots & & \vdots \\ n & \text{Show} & \phi \\ n+1 & & \chi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ n+m & & \chi_m \end{array}$$

次の 3 つの場合のどれかであるとき、$n+1$ 行目から $n+m$ 行目までの記号文を「箱入れ」し、n 行目の「Show Line」を「打消し」してよい。

(a) ϕ が $n+1$ 行から $n+m$ 行までに「箱入れ」されずにある場合（これには、ϕ が「打消し」された「Show Line」とともにある場合も含まれる。)。

(b) ϕ が $\psi_1 \to \psi_2$ という形式の記号文であり、ψ_2 が $n+1$ 行から $n+m$ 行までに「箱入れ」されずにある場合（これには、ψ_2 が「打消し」された「Show Line」とともにある場合も含まれる。)。

(c) ある記号文 μ が存在し、$n+1$ 行から $n+m$ 行までに、μ と $\sim \mu$ の両方がある場合（これには、μ あるいは $\sim \mu$ が「打消し」された「Show Line」とともにある場合も含まれる。)。

また、上述の 3 つの場合、それぞれにおいて次のように「箱入れの正当化」を表記する。

(a) の場合：「箱入れの正当化」として、ϕ の行番号とともに "DD" と表記すること。

(b) の場合：「箱入れの正当化」として、ψ_2 の行番号とともに "CD" と表記すること。

(c) の場合：「箱入れの正当化」として、μ および $\sim \mu$ の行番号とともに "ID" と表記すること。

定義 1. 演繹の各行が、箱入れされている、あるいは打消しされた $Show\,Line$ を含むとき、その演繹を**完成した演繹**という。

定義 2. 完成した演繹において、前提 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ から、打消しされた $Show\,Line$ とともに ψ が得られ、そのうえその行が箱入れされていないとき、前提 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ から ψ を**演繹可能**であるという。なお、以

下では、$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ から ψ を演繹可能であるということを、

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

と表す。

定義 3. いかなる記号文をも前提とすることなく結論 ψ が演繹可能であるとき、ψ を**定理**という。以下では、ψ が定理であるということを

$$\vdash \psi$$

と表す。

「演繹可能」という概念を用いて統語論的方法は次のように説明できる。前提 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ から結論 ψ を得る議論が統語論的方法において正しいとは、前提 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ から ψ を演繹可能なときであり、そしてそのときに限る、ということである。

さて、ある議論が統語論的方法において正しくないことを示すには、その議論の前提から結論を演繹不可能であることを示さねばならない。講義でも述べたように、（現時点の我々の道具立てでは）これは不可能である。これまで試みた演繹によってはその議論の結論が得られなくても、別の演繹ではその結論が得られるかもしれず、そのような可能性はいつまでも残るからである。しかし、第 4 章でみるように、完全性と健全性を示した後では、真理表を書きさえすればある議論が統語論的に正しくないことを示すことができる。

2　意味論的方法

意味論的方法とは、講義で紹介したように、真理表を用いて議論の正否を判定する方法である。背景にある考え方は、正しい議論とは、その議論のすべての前提が真であるとき、必ず結論も真である議論である、というものである。議論が意味論的方法において正しいということを、その議論は意味論的に妥当であるという。より正確には次のように定義される。

定義 4. 前提 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から結論 ψ を得る議論が**意味論的に妥当**であるのは、その真理表において、すべての前提 $(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ が真でありかつ結論 ψ が偽である行が存在しないとき、そしてそのときに限る。今後、前提 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から結論 ψ を得る議論が意味論的に妥当であることを、

$$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \models \psi$$

と表す。

次に、意味論的方法における、もう一つの重要概念「トートロジー」を定義しておこう。

定義 5. 記号文 ψ が**トートロジー**であるのは、その真理表のすべての行において ψ が真であるとき、そしてそのときに限る。今後、ψ がトートロジーであるということを、

$$\models \psi$$

と表す。

3　完全性と健全性

議論の正否を判定する二つの方法が存在した。統語論的方法と意味論的方法である。これから、それら二つの方法の関係について考える。より具体的には、次の問いを考える。これら二つの方法は、いつでも、同一の判定を与えるのだろうか？一方の方法で正しい議論と判定されるが、もう一方の方法では誤った議論と判定されることはないのだろうか？以下で詳しくみるように、二つの判定法による結果にずれが生じることはない。実際、これからみるように、次の事実を証明できる。

Theorem 1. $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \vdash \psi$ であるのは、$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \models \psi$ であるとき、そしてそのときに限る。

要するに、$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を演繹可能である（統語論的方法において正しい）のは、$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を得る議論が意味論的に妥当である（意味論的方法において正しい）とき、そしてそのときに限る、ということである。それぞれ、

健全性：　$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を演繹可能　$\Rightarrow$　$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を得る議論が意味論的に妥当
完全性：　$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を得る議論が意味論的に妥当　$\Rightarrow$　$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を演繹可能

と呼ばれる。

以下で、この事実を、つぎのようなパートに分け、それぞれが同値であることを示すことによって、みていこう。

$$
\begin{aligned}
\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \vdash \psi &\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} \vdash \phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n \to \psi \\
&\overset{(b)}{\Longleftrightarrow} \models \phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n \to \psi \\
&\overset{(c)}{\Longleftrightarrow} \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \models \psi
\end{aligned}
$$

順番は前後するが、以下、(a)、(c)、(b) の順にみていく。

(a) について：　ここでは、$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n \to \psi$ の左から右、すなわち前提 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を演繹可能であるときに、前提なしで、$\phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n \to \psi$ が演繹されることを示す。条件文 $\phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n \to \psi$ を演繹する CD の仮定 $\phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n$ に推論規則の S を繰り返し適用すると次のようになる。

1	Show	$\phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n \to \psi$	
2		$\phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n$	Ass CD
$\vdots$		$\vdots$	
		ϕ_1	
		ϕ_2	
$\vdots$		$\vdots$	
		ϕ_n	

ところで、いま、$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から ψ を演繹できるのであった。その演繹を上の途中段階の演繹に続けると、ψ が導出され、$\phi_1 \land \phi_2 \land \cdots \land \phi_n \to \psi$ が演繹される。

(a) の右から左についても、同様の考え方で証明できることは容易にわかるだろう。各自で、何事をどのように示せばよいか、考えてほしい。

(c) について：　ここでは、$\models (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n \rightarrow \psi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \models \psi$ の左から右を示す。$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$ がトートロジーだが、前提 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から結論 ψ を得る議論は意味論的に妥当でないとする。意味論的に妥当でないので、すべての前提 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ が真だが、結論 ψ が偽である真理表の行が存在する。その行において、$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$ は偽となるが、仮定よりその記号文はトートロジーなので矛盾が生じる。よって、$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$ がトートロジーであるとき、前提 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ から結論 ψ を得る議論は意味論的に妥当である。

(c) の右から左についても、同様の考え方で証明できることは容易にわかるだろう。各自で、何事をどのように示せばよいか、考えてほしい。

(b) について：　ここでは、(b) 自体より一般的な次の事実を証明する[*3]。次の事実が証明されれば、その特殊ケースとして (b) も示されることは、容易にわかるだろう。

事実 1. 任意の記号文 ξ について、ξ が定理であるのは、ξ がトートロジーであるとき、そしてそのときに限る。すなわち、任意の記号文 ξ について、$\vdash \xi \ \Leftrightarrow \ \models \xi$ である。

以下、この事実を左から右（事実２）と、右から左（事実３）に分けて示す。

事実 2. 任意の記号文 ξ について、ξ は定理であるならば、ξ はトートロジーである。すなわち、任意の記号文 ξ について、$\vdash \xi \ \Rightarrow \ \models \xi$ である。

はじめに、次の事に注意してほしい。まず、以下では定理の演繹について考えるので、演繹に一切前提 (Pr) は存在しないということである。次に、講義で証明したように、すべての「混合演繹」は「斉一的演繹」になおすことができるので、部分演繹も含むすべての演繹が斉一的演繹により構成される場合のみを考えれば十分である。さらには、すべての直接演繹（DD）は間接演繹（ID) に形式的にはなおすことができる（どのようになおすかは各自考えてほしい)。よって、ID と CD の斉一的演繹のみを考えれば十分である。

以下でみるように、証明は３つのステップに分けて行う。

ステップ１：行番号を付け替える　演繹の行番号を、演繹を構成する際に利用可能となる順に付け替える。

例えば、下のような形式の演繹があるとしよう。「Show Line」とともにある記号文は、その「Show Line」が打消しされたときにはじめて利用可能となる。そこで、ステップ１では下の演繹図の右側に書いたように、行番号を付け替えることになる。以下では、この新たに付け替えた行番号を用いる。

[*3] 多くのテキストでは、むしろ、次の事実で述べることを「健全性」、「完全性」と呼んでいる。

				新たな行番号
1	Show	ϕ_1		8
2		ϕ_2	Ass . . .	1
3		ϕ_3		2
4	Show	ϕ_4		7
5		ϕ_5	Ass . . .	3
6		ϕ_6		4
7		ϕ_7		5
8		ϕ_8		6

ステップ２：導出式を定義する　演繹のそれぞれの行 n について、n 行目の導出式を次のように定義する。

n **行目の導出式**：n 行目までで（n **行目も含む**）利用可能な仮定 “Ass”すべてからなる連言を前件、n 行目の記号文を後件とする条件文。（ただし、利用可能な仮定が存在しない場合は、n 行目の記号文そのものが n 行目の導出式となる。）

ステップ 1 の説明に用いた具体例を再び利用すると、n 行目までで利用可能な仮定と n 行目の導出式は次のようになる。n 行目が仮定であるとき、n 行目までで利用可能な仮定のなかに、n **行目自体も含まれる**ことに注意してほしい。例えば、1 行目（新たな行番号）までで利用可能な仮定のなかには 1 行目の仮定 ϕ_2 も含まれる。よって、1 行目の導出式は $\phi_2 \to \phi_2$ となる。また、箱入れされた仮定は利用不可能となることにも注意してほしい。（7 行目の導出式を考える際、利用可能な仮定に ϕ_5 は入らないし、および 8 行目の導出式を考える際、利用可能な仮定に ϕ_2 が入らない。）

				新たな行番号	利用可能な仮定	導出式
1	Show	ϕ_1		8	なし	ϕ_1
2		ϕ_2	Ass . . .	1	ϕ_2	$\phi_2 \to \phi_2$
3		ϕ_3		2	ϕ_2	$\phi_2 \to \phi_3$
4	Show	ϕ_4		7	ϕ_2	$\phi_2 \to \phi_4$
5		ϕ_5	Ass . . .	3	ϕ_2, ϕ_5	$\phi_2 \wedge \phi_5 \to \phi_5$
6		ϕ_6		4	ϕ_2, ϕ_5	$\phi_2 \wedge \phi_5 \to \phi_6$
7		ϕ_7		5	ϕ_2, ϕ_5	$\phi_2 \wedge \phi_5 \to \phi_7$
8		ϕ_8		6	ϕ_2, ϕ_5	$\phi_2 \wedge \phi_5 \to \phi_8$

ステップ３：数学的帰納法の利用　数学的帰納法を利用して、各行の導出式がトートロジーであることを証明する。（ただし、行番号は新たな行番号を利用することに注意せよ。）

「1 行目の導出式はトートロジーである」ことを示す

いま定理の演繹を考えているので、前提は存在しない。また、すべての演繹は斉一的演繹になおすことができ、さらには DD は ID になおすことができるのだった。そこで、前提なしの斉一的演繹 CD および ID を考えれば十分である。そのとき、1 行目は必ず仮定 “Ass”であり、その導出式は $\phi \to \phi$ の形式

をもつ。この記号文がトートロジーであることは明らかである。

「n 行目より前のすべての行の導出式がトートロジーであるならば、n 行目の導出式もトートロジーである」ことを示す

n 行目の記号文（導出式ではない）がどのように得られたのかに応じて、次の 3 通りに場合分けする。

1. n 行目の記号文が、仮定 “Ass”である場合。
2. n 行目の記号文が、何らかの「推論規則」によって得られる場合。
3. n 行目の記号文が、CD あるいは ID における、箱入れおよび「Show Line」の打消しにより得られた場合。

- **n 行目の記号文が、仮定 “Ass”である場合**

  n 行目の記号文が CD の仮定 “Ass”である場合を例に証明の仕方を説明しよう。（n 行目の記号文が ID の仮定 “Ass”である場合も同様に証明できる。）そのとき、演繹の n 行目の記号文と「利用可能な仮定」は、形式的には次のように表される。

新しい行番号			利用可能な仮定
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	ψ	$l, m\,\mathrm{MP}$	$\psi, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

  すると、n 行目の導出式は

$$\psi \wedge \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \cdots \wedge \mu_i \to \psi$$

  である。この導出式がトートロジー（恒真）であることを示せばよい。この式がトートロジーでないとする（背理法の仮定）。そのとき、この式が偽となる真理値の付与の仕方が存在する。そのような真理値付与において、（この式は条件文なので）前件 $\psi \wedge \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \cdots \wedge \mu_i$ は真、後件 ψ は偽である。しかし、後件の ψ が偽であるとき、前件の連言は必ず偽となるので、矛盾が生じる。よって、n 行目の導出式はトートロジーである。

- **n 行目の記号文が「推論規則」によって得られる場合**

  n 行目の記号文が MP により得られる場合を例に証明の仕方を説明しよう。(他の推論規則の場合も同様に証明できる。各自、考えてほしい。)

  〈MP を利用する演繹〉

新しい行番号			利用可能な仮定
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	ϕ	$\vdots$	$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$\phi \to \psi$	$\vdots$	$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	ψ	l, m MP	$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ここで、l 行目と m 行目の記号文に MP を適用して n 行目の記号文を得る場合には、行番号が $l < m < n$ と増えるに応じて利用可能な仮定が増えることはありうるが、減ることはありえないことに注意してほしい。理由は以下の通り。仮に、l 行目で利用可能なある仮定が m 行目では利用不可能であるとしよう。演繹の l 行目を構成した段階では行われていなかった箱入れが、l 行目と m 行目の途中で行われたということである。すると、その箱入れによって l 行目の記号文も利用不可能となり、MP を適用できないことになってしまうが、このことは l 行目の記号文を利用して MP によって n 行目の記号文を得るということと矛盾する。したがって、l 行目で利用可能な仮定が m 行目で利用不可能となることはなく、利用可能な仮定が減ることはない。一方、利用可能な仮定が増えることはありうる。というのも、l 行目と m 行目の間に、演繹の m 行目を構成しているときにはまだ打消しされていない「Show Line」があるとき、その次の行の仮定 "Ass" が新たに利用可能となるからである。これまでは、l 行目と m 行目で利用可能な仮定について述べたが、m 行目と n 行目で利用可能な仮定についても同様である。

さて、n 行目より前のすべての行の導出式がトートロジーであるとする(数学的帰納法の仮定)。l 行目の導出式と m 行目の導出式、それぞれ、

$$\mu_1 \land \mu_2 \land \cdots \land \mu_i \to \phi \tag{1}$$

および

$$\mu_1 \land \mu_2 \land \cdots \land \mu_i \land \theta_1 \land \theta_2 \land \cdots \land \theta_j \to (\phi \to \psi) \tag{2}$$

はともにトートロジーである。そのときに、n 行目の導出式

$$\mu_1 \land \mu_2 \land \cdots \land \mu_i \land \theta_1 \land \theta_2 \land \cdots \land \theta_j \land \pi_1 \land \pi_2 \land \cdots \land \pi_k \to \psi \tag{3}$$

がトートロジーであることを示せばよい。仮に (3) がトートロジーでないとする。そのとき、$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ はすべて真だが、ψ は偽である、真理表の行が存在する。以下、真理表のその行について証明を進める。(1) はトートロジーであり、そのうえ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$ はすべて真なので、ϕ は真である。(2) もトートロジーであり、そのうえ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j$ はすべて真なので、$\phi \to \psi$ も真でなければならない。しかし、ϕ は真かつ ψ は偽であった。よって $\phi \to \psi$ は偽となり矛盾が生じる。

- **n 行目の記号文が「Show Line」とともにある記号文であり、演繹の形式 CD あるいは ID による箱入れを経て、「Show Line」の打消しにより得られる場合**

  ここでは、演繹の形式が CD である場合についてのみ考える。(ID の場合については、各自考えてほしい。)

  〈演繹の形式が CD である場合〉

新たな行番号				利用可能な仮定
⋮		⋮		
n	Show	$\phi \to \psi$		$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$
m		ϕ	Ass CD	$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \phi$
⋮		⋮		
⋮		⋮		
n-1		ψ		$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \phi$
		n-1 CD		

  m、$n-1$、n（$m < n-1 < n$）の各行で利用可能な仮定について次のことに注意してほしい。m 行目と $n-1$ 行目とでは同じ記号文の集合が利用可能な仮定となる。もし m 行目では利用できないが、$n-1$ 行目で利用できる仮定が存在するならば、m 行目と $n-1$ 行目との間に打消しされていない「Show Line」が存在することになる。しかし、演繹において打消しされていない「Show Line」を箱入れできない。(２頁の演繹の規則６をみよ。)一方、m 行目では利用できるが、$n-1$ 行目では利用できない仮定が存在するならば、その仮定は m 行目から $n-1$ 行目の間で箱入れされたことになる。しかし、そのとき m 行目の記号文も同時に箱入れされてしまう。また、n 行目では ϕ は箱入れされているので、利用可能な仮定ではないことにも注意せよ。

  さて、n 行目より前のすべての行の導出式がトートロジーであるとする (数学的帰納法の仮定)。そのとき、$n-1$ 行目の導出式

  $$\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \cdots \wedge \mu_i \wedge \phi \to \psi \tag{4}$$

  はトートロジーである。そのときに、

  $$\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \cdots \wedge \mu_i \to (\phi \to \psi) \tag{5}$$

  がトートロジーであることを示せばよい。仮に、(5) がトートロジーでないとする。そのとき、$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$ はすべて真だが、$\phi \to \psi$ は偽である、真理表の行が存在する。以下、その行について考える。$\phi \to \psi$ は偽なので、ϕ は真、 ψ は偽である。すると、真理表のその行においては、$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \phi$ はすべて真だが、ψ は偽であり、(4) は偽となる。しかし、(4) はトートロジーであった。

次に、事実１の右から左にあたる次の事実を証明しよう。

事実 3. 任意の記号文 ξ について、ξ はトートロジーであるならば、ξ は定理である。すなわち、任意の記号文 ξ について、 $\models \xi \ \Rightarrow \vdash \xi$ である。

この事実の証明に、次のレンマを用いる。

Lemma 1. 任意の記号文 η は次の性質†をもつ。

性質†：
η に含まれるすべての原子文を $P_1, P_2, \ldots, P_k$ と表す。η の真理表のある行について（どの行でもよい）、P_i' $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を次のように定義する。

$$P_i' \equiv \begin{cases} P_i & (P_i \text{ が真のとき}) \\ \sim P_i & (P_i \text{ が偽のとき}) \end{cases}$$

さらに、真理表の同じ行について次のように定義する。

$$\eta' \equiv \begin{cases} \eta & (\eta \text{ が真のとき}) \\ \sim \eta & (\eta \text{ が偽のとき}) \end{cases}$$

そのとき、

$$P_1', P_2', \ldots, P_k' \vdash \eta'$$

すなわち、前提 $P_1', P_2', \ldots, P_k'$ から η' を演繹可能である。

Proof. 証明には、η に含まれる結合子の個数についての数学的帰納法を用いる。

まず、記号文 η に含まれる結合子の個数が 0 であるときに、その記号文が性質†をもつことを示す。そのとき、η に含まれる原子文は P_1 のみで、$\eta = P_1$ である。真理表のある行において、P_1 が真ならば、$P_1' = P_1$ かつ $\eta' = P_1$ なので、$P_1 \vdash P_1$ を示せばよいが、前提 P_1 から P_1 そのものを演繹できることは明らかであろう（実際、演繹は2行で終わる）。また、P_1 が偽ならば、$P_1' = \sim P_1$ かつ $\eta' = \sim P_1$ なので、$\sim P_1 \vdash \sim P_1$ を示せばよいが、この演繹も明らかに2行で終わる。

次に、含まれる結合子の個数が n より小さいすべての記号文が性質†をもつと仮定し（数学的帰納法の仮定）、含まれる結合子の個数が n である任意の記号文 η が性質†をもつことを証明する。η の主結合子が、それぞれ、“$\sim$”、“$\rightarrow$”、“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\leftrightarrow$”である場合について証明すればよい。ここでは、η の主結合子が、“$\sim$”、“$\rightarrow$”の場合のみ証明する。[*4]

η の主結合子が “$\sim$”である場合：
含まれる結合子の個数が $n-1$ のある記号文 ξ について $\eta = \sim \xi$ である。ξ に含まれるすべての原子文を

[*4] 本文では、η の主結合子について、5 通りすべての場合 $(\rightarrow, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ を証明するように書いたが、実際はもう少し証明を簡略化できる。一般に、結合子を含む任意の記号文 ϕ には、$\phi \leftrightarrow \psi$ を満たす、結合子として “$\sim$”、“$\rightarrow$”のみを含む記号文 ψ が存在する。結合子 “$\wedge$”や “$\vee$”や “$\leftrightarrow$”を含むいかなる記号文も、結合子として “$\sim$”あるいは “$\rightarrow$”しか用いない記号文に書きなおすことができるのである。

例えば、“$\vee$”のついては次が成立する。

$$\eta \vee \theta \leftrightarrow (\sim \eta \rightarrow \theta)$$

上述の双条件文は、任意の記号文から結合子 “$\vee$”を消去できることを意味する。

“$\wedge$”については、次が成立する。

$$\eta \wedge \theta \ \leftrightarrow \sim\sim \eta \wedge \sim\sim \theta \ \leftrightarrow \sim (\sim \eta \vee \sim \theta) \ \leftrightarrow \sim (\sim\sim \eta \rightarrow \sim \theta) \ \leftrightarrow \sim (\eta \rightarrow \sim \theta)$$

ここで、2つ目の “$\leftrightarrow$”はド・モルガン則に、3つ目の “$\leftrightarrow$ ” はすぐ上で確認した “$\vee$”の書き換えによる。よって、任意の記号文から結合子 “$\wedge$”も消去できる。

“$\leftrightarrow$”については、もはや明らかであろう。記述を省略する。

このように命題論理におけるあらゆる記号文は、結合子として “$\sim$”、“$\rightarrow$”のみを含む記号文に書き直すことができる。そしてこのことは、レンマの証明をそれら二つの結合子についてすれば十分であることを意味する。証明の詳細をどのようにすればよいのかは各自で考えよ。

$P_1, P_2, \ldots, P_k$ と表す。明らかに、これらは、η に含まれるすべての原子文でもある。数学的帰納法の仮定より、

$$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \xi' \tag{6}$$

であり、その仮定のもとで、

$$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \eta' \tag{7}$$

を示せばよい。

真理表のある行において、ξ が真であるとしよう。そのとき、$\xi' = \xi$ である。すると、(6) より $P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \xi$ である。また、$\eta = \sim \xi$ なので η は偽であり、$\eta' = \sim \eta = \sim\sim \xi$ なので、(7) からわかるように、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \sim\sim \xi$ を示せばよい。だが、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \xi$ であるとき、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \sim\sim \xi$ であることは明らかである。なぜなら、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k$ から演繹された ξ に DN（二重否定）を適用すると、$\sim\sim \xi$ が演繹されるからである。

次に、真理表のある行において、ξ が偽であるとしよう。そのとき、$\xi' = \sim \xi$ であり、(6) より、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \sim \xi$ である。また、$\eta = \sim \xi$ なので η は真であり、$\eta' = \eta = \sim \xi$ なので、(7) からわかるように、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \sim \xi$ を示せばよい。これは、(6) から得たことそのものである。

η の主結合子が "$\rightarrow$"である場合：

含まれる結合子の個数が n より小さい 2 つのある記号文 π と θ について $\eta = \pi \rightarrow \theta$ である。π に含まれるすべての原子文を $P_1, P_2, \ldots, P_i$ と表し、θ に含まれるすべての原子文を $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j$ と表す。明らかに、η に含まれるすべての原子文は $P_1, P_2, \ldots, P_i, Q_1, Q_2, \ldots, Q_j$ である。数学的帰納法の仮定より、

$$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i \vdash \pi' \quad \text{かつ} \quad Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \theta' \tag{8}$$

であり、その仮定のもとで、

$$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \eta' \tag{9}$$

を示せばよい。

次の 3 つの場合に分けて考えよう。

1. π が偽である場合：
   $\pi' = \sim \pi$ なので、(8) より、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i \vdash \sim \pi$ である。そのとき、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i \vdash \pi \rightarrow \theta$ となる。なぜなら、いま、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i$ から $\sim \pi$ を演繹可能なのだが、その演繹を利用して、下のように同じ前提 $P'_1, P'_2, \ldots, P'_i$ から $\pi \rightarrow \theta$ を演繹できるからである。

1	Show	$\pi \rightarrow \theta$	
2		π	Ass CD
3		P'_1	Pr
4		P'_2	Pr
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
		P'_i	Pr
$\vdots$		$\vdots$	
m		$\sim \pi$	[$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i \vdash \sim \pi$ なので]
		2, m ID	

よって、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i \vdash \pi \to \theta$ である。そのとき明らかに、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \pi \to \theta$ となる。なぜなら、もともといくつかの前提から演繹可能であったことは、それらの前提にさらに前提を加えても依然として演繹可能だからである。ところで、いま、π は偽なので、η は真であり、$\eta' = \eta = \pi \to \theta$ である。よって (9) が示された。

2. θ が真である場合：
$\theta' = \theta$ であり、(8) より $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \theta$ である。そのとき、$Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \pi \to \theta$ である（π が偽である場合と同じように、理由を考えよ）。すると、前提を増やしても $\pi \to \theta$ は演繹可能なので、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \pi \to \theta$ である。ところで、いま θ は真なので、η も真であり、$\eta' = \eta = \pi \to \theta$ である。よって、(9) が示された。
3. π が真で、 θ が偽である場合：
$\pi' = \pi$ および $\theta' = \sim\theta$ である。よって (8) より、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i \vdash \pi$ および $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \sim\theta$ である。そのとき、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_i, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j \vdash \sim(\pi \to \theta)$ である（理由は各自考えよ）。ところで、いま、π が真で、 θ が偽なので、η は偽であり、$\eta' = \sim\eta = \sim(\pi \to \theta)$ である。よって、(9) が示された。

□

さて、以上の準備のもとで、事実３、すなわち $\models \xi \;\Rightarrow\; \vdash \xi$ を示す。

Proof. ξ に含まれるすべての原子文を $P_1, P_2, \ldots, P_k$ と表す。Lemma1 より ξ は性質 † をもつ。Lemma1 の諸定義を用いると、ξ の真理表のある行について（どの行を選んでもよい）$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \xi'$ となる。ξ はトートロジーなので真理表の任意の行において真であり、真理表のどの行についても $\xi' = \xi$ なので、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k \vdash \xi$ である。そのとき、

$$P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k-1} \vdash P'_k \to \xi \tag{10}$$

となる（理由は各自考えよ）。

さて、はじめに選んだ真理表の行と、P_k を除く他の原子文の真理値はすべて一致するが、P_k の真理値だけ異なる真理表の行を考えよう。Lemma1 を用いると、その行について、$P'_1, P'_2, \ldots, \sim P'_k \vdash \xi$ が成立することがわかる。すると、

$$P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k-1} \vdash \sim P'_k \to \xi \tag{11}$$

となる。

そのとき、下の演繹でみるように、(10) と (11) を利用して、前提 $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k-1}$ から ξ を演繹可能であることがわかる。

1	Show	ξ	
2		$\sim\xi$	Ass ID
3		P'_1	Pr
4		P'_2	Pr
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
		P'_{k-1}	Pr
$\vdots$		$\vdots$	
l		$P'_k \to \xi$	(10) より
$\vdots$		$\vdots$	
m		$\sim P'_k \to \xi$	(11) より
m+1		$\sim P'_k$	2,l MT
m+2		$\sim\sim P'_k$	2, m MT
		m+1, m+2 ID	

よって、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k-1} \vdash \xi$ であることが示された。

さて、真理表のある行を選び、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k-1}, P'_k \vdash \xi$ からはじめて、$P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k-1} \vdash \xi$ を示した。ここで、P'_k が前提から消去されたことに注意してほしい。同様のプロセスをあと $k-1$ 回繰り返し、すべての前提を消去すると $\vdash \xi$ が得られる。 □

4　完全性と健全性からの帰結

前節で健全性と完全性、そしてそれらに関わる諸事実を示した。ここでは、それらから帰結する 2 つのことを紹介する。

議論の演繹不可能性を示すことができる：
第一章「統語論的方法」の最後の段落で、ある議論が統語論的に正しくないことを示すには、その議論の前提から結論を演繹不可能であることを示さねばならないが、しかし、失敗する演繹を何度繰り返しても、演繹の不可能性を示すことはできない、と述べた。だが、いまでは、ある議論が演繹不可能であることを示すことができる。それには、真理表を書いてその議論が意味論的に妥当か否かを調べればよい。

ある議論が意味論的に妥当でなかったとしよう。そのとき、健全性の対偶、すなわち「ある議論が意味論的に妥当でないならば、その議論の演繹を構成することは不可能である」より、その議論の演繹を構成することは不可能である。一方、ある議論が意味論的に妥当ならば、完全性より、その議論は演繹可能である。よって、ある議論が演繹可能か否かを知りたければ、真理表を書いてその議論が意味論的に妥当なのか、否かを調べればよい。

命題論理の演繹の体系は無矛盾性である：
命題論理の演繹の体系において、矛盾する 2 つの記号文 η と $\sim\eta$ が定理となることはない。証明は次の通り。それらが定理であるとしよう（背理法の仮定）。そのとき、推論規則 Adj を用いると、$\eta\wedge\sim\eta$ も定理である。ところで、事実 1 より、ある記号文が定理であるならば、その記号文はトートロジーである。よって、$\eta\wedge\sim\eta$ はトートロジーとなってしまうが、それは事実に反する。