テーマ D　片持ちはりの静歪み測定

[概説と予習]

１．歪みゲージ

１．１　歪みゲージとは

歪みゲージ（図 1.1）は，測定対象物の表面に接着することで，その歪み（微小な長さの変化）を電気信号として検出するセンサです．測定対象物に加わる荷重や圧力，加速度などと，その結果生じる歪みの関係が分かっていれば，それらのセンサとしても応用できます．歪みゲージは，測定対象物，測定レンジ，使用環境などによって様々な種類があります．

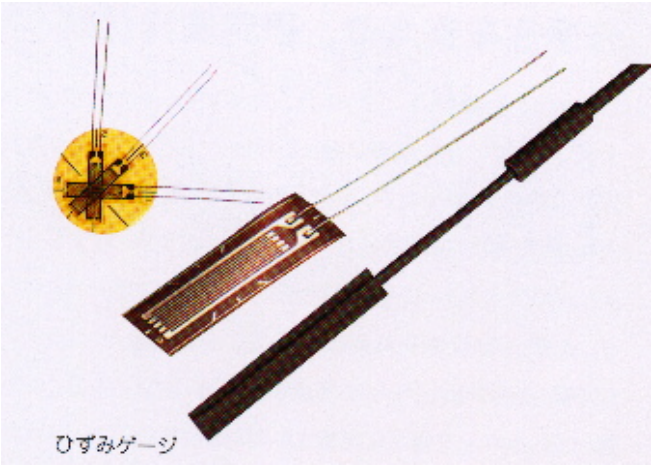


図１．１　歪みゲージ

１．２　歪みゲージの測定原理

材料の電気抵抗は，組成とサイズ，温度が決まれば，ほぼ決まります．その材料に外力を加えて伸縮させる（長さ L を ΔL だけ変化させる）と，その材料の抵抗値 R がある範囲では線形に ΔR 変化します．つまり，

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{K}\frac{\Delta R}{R} \tag{1.1}$$

の関係があります．ε は歪み，K はゲージ率と呼ばれるゲージの種類で決まる比例定数です．歪みゲージでは，この抵抗値の変化から歪みを測定します．歪みゲージが測定対象物に完全に接着されていれば，それらに生じる歪みは等しいと考えることができます．

歪みゲージの抵抗変化は微小なため，ホイーストンブリッジ回路を用いて電圧の変化に変換して測定します．図 1.2 のようなブリッジ回路を考えると，入力電圧（ブリッジ電圧）を e_{in} として，出力電圧 e_{out} は，

$$e_{out} = \frac{R_2R_4 - R_1R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}e_{in} \tag{1.2}$$

となります．式(1.2)より，$R_1R_3=R_2R_4$ のとき，出力電圧がゼロとなる（平衡状態という）ことから，例えば R_2 と R_3 を既知抵抗，R_4 を可変抵抗とすれば，出力電圧がゼロとな

るように R_4 を調整することで，R_1 の抵抗を精度よく測定することができます．逆に，平衡状態からいずれかの抵抗値がわずかでも変化すると，電圧が出力されます．これにより，微小な抵抗の変化を検出することができます．いま $R_1=R_2=R_3=R_4=R$ とし，歪みゲージに歪みが加わって抵抗 R が ΔR だけ変化したとすると，

$$e_{out} = \frac{\Delta R}{4R + 2\Delta R} e_{in} \tag{1.3}$$

となり，ΔR<<R とみなせるため，

$$e_{out} \sim \frac{1}{4}\frac{\Delta R}{R} e_{in} = \frac{1}{4} K\varepsilon e_{in} \tag{1.4}$$

となります．結果，入力電圧（ブリッジ電圧）e_{in} に対し，歪みに比例した出力電圧 e_{out} が得られます．最後に，この電圧をアンプで増幅して出力値を得ます．

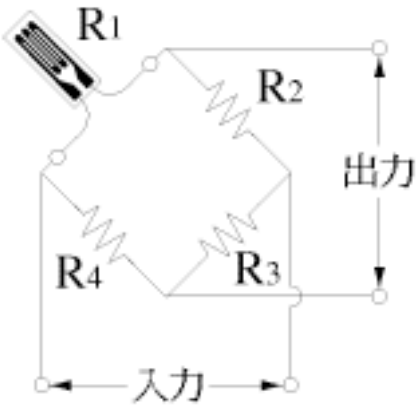


図１．２　ブリッジ回路

１．３　歪みゲージの構造

歪みゲージは，図 1.3 のように薄い絶縁体上に格子状の抵抗線または金属箔をフォトエッチング加工し，リード線を取り付けて製作されます．

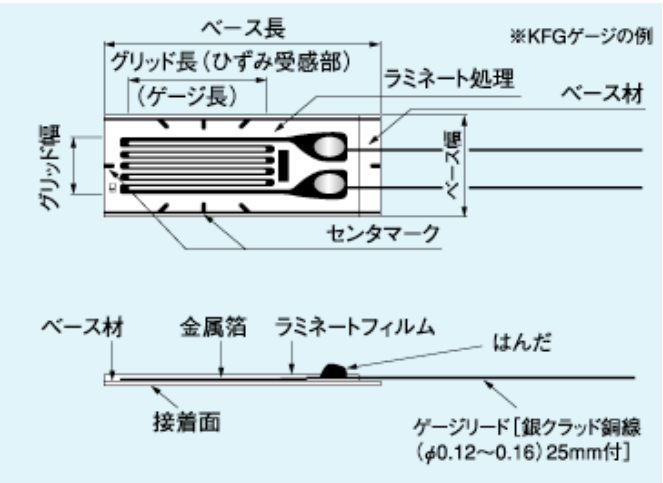


図１．３　歪みゲージの構造

１．４　OP アンプ

ブリッジ回路に組み込んだ歪みゲージの出力電圧は微小なため，アンプで増幅します．OP アンプ（オペアンプ）は，電気信号の増幅器です．アナログ信号の演算ができる増幅器という意味で Operational Amplifier と呼ばれています．回路記号では図 1.4 のように表されます．図 1.4 のように，オペアンプには２つの入力と１つの出力があります．ただし，電源端子は省略して書いてあります．プラス記号（＋）が書いてある方を非反転入力，マイナス記号（—）が書いてある方を反転入力と呼びます．オペアンプの非反転入力と反転入力に，それぞれ V_+，V_-の電圧を加えた時，出力電圧 V_{out} は，

$$V_{out}=A(V_+-V_-) \tag{1.5}$$

となります．A はもともとの増幅率で 10^5~10^7 程度です．つまり，オペアンプは非反転入力と反転入力の電位差を増幅し，$V_+>V_-$で正電圧，$V_+<V_-$で負電圧を出力します．ゲインや動作を適切に設定するためには，オペアンプに抵抗やコンデンサを繋げて使用します．以下では，その中で図 1.5 に示した反転増幅回路について説明します．

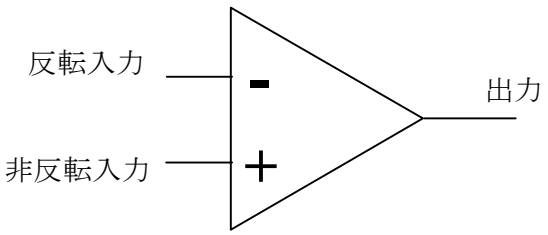


図１．４ OP アンプの記号

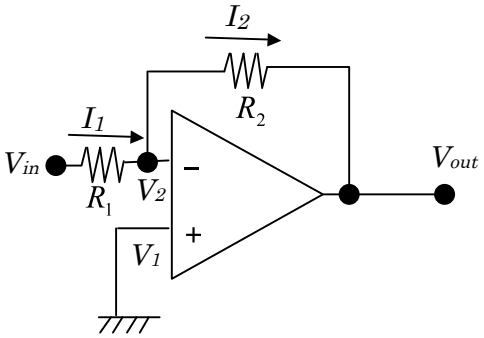


図１．５ 反転増幅回路

オペアンプの入力インピーダンスは非常に大きいため，流入電流は無視でき，

$$I_1=I_2 \tag{1.6}$$

よって，

$$I_1=\frac{V_{in}-V_2}{R_1}=\frac{V_2-V_{out}}{R_2} \tag{1.7}$$

となります．また，式(1.5)より，

$$V_{out}=A(V_1-V_2) \tag{1.8}$$

から，

$$V_2=V_1-\frac{V_{out}}{A} \tag{1.9}$$

で，A>>1 として，

$$V_2\sim V_1=0 \tag{1.10}$$

となり，この状態をイマジナリショートと呼びます．これを式(1.7)に代入すると，

$$V_{out}=-\frac{R_2}{R_1}V_{in} \tag{1.11}$$

となり，反転増幅回路では，増幅率は二つの抵抗の比となり，入力と出力の極性は反転します．

２．　片持ちはり

２．１　片持ちはりとは

棒が中心軸に対して横からの荷重あるいは曲げモーメントを受ける場合に，この棒を“はり”と呼びます．はりの中で，その一端が固定端，他方が自由端で構成されているはりを“片持ちはり”と言います．

２．２　片持ちはりのせん断力と曲げモーメント

長さ L の片持ちはりに，(a) 集中荷重 W が自由端 B に作用する場合と，(b)単位長さあたり等分布荷重 w が作用する場合，断面 x におけるせん断力 F_x と曲げモーメント M_x は，下記のようになります．ただし，ここではせん断力 F はある断面 x においてその右側が下に押し下げられるような場合を正，曲げモーメントは下方に凸と曲げられる場合を正としています．

複数の集中荷重や分布荷重などが加わる場合は，それらが単独に作用した場合のせん断力または曲げモーメントを加え合わせることで求められます（重ね合わせの原理）．

(a) 集中荷重

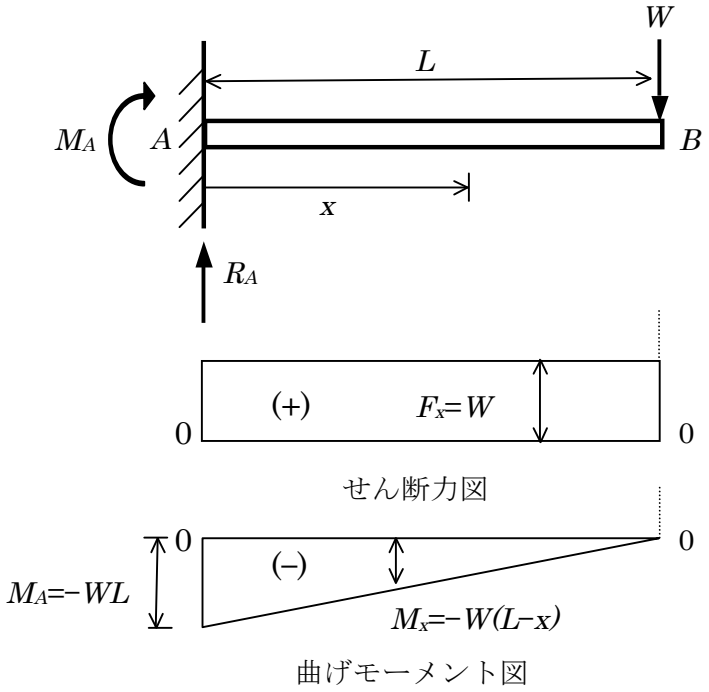


図２．１　集中荷重を受ける片持ちは

$$F_x = W \tag{2.1}$$

$$M_x = -W(L - x) \tag{2.2}$$

(b) 等分布荷重

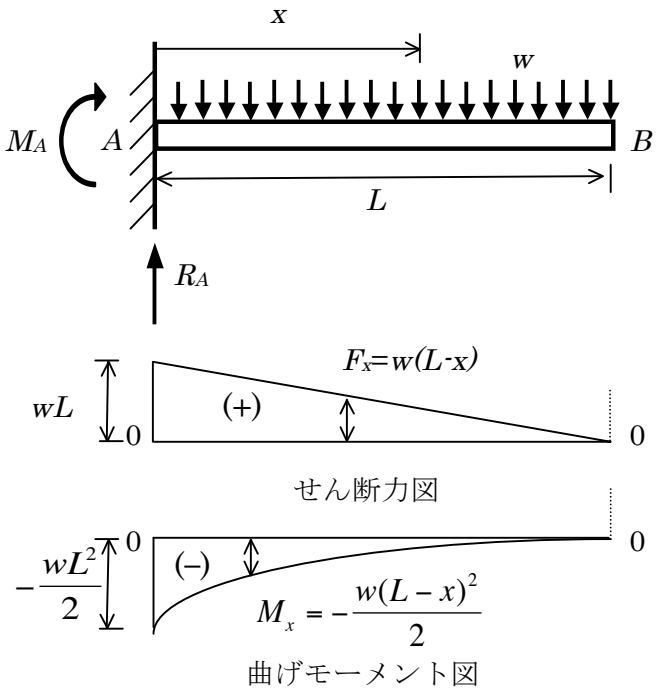


図２．２　等分布荷重を受ける片持ちは

$$F_x = w(L-x) \tag{2.3}$$

$$M_x = -\frac{w(L-x)^2}{2} \tag{2.4}$$

２．３　単純曲げを受けるはりの応力

ここでは，せん断力のみが作用するはりの応力をせん断応力，曲げモーメントのみが作用する単純曲げの状態のはりの応力を曲げ応力と呼びます．

一般に，はりは軸方向の長さに比べてその横断面の長さが十分小さいため，全長を通じてせん断応力は，曲げ応力に比べて無視できる程度に小さいと考えられます．

図 2.3 のように，軸方向のある部分で曲げモーメント M_x を受けているはりの中心軸 $\widehat{ab}$ からの距離 y の位置の歪み $\varepsilon = (\widehat{d'd})/(\widehat{cd'})$ と曲げ応力 $\sigma_{x,y}$ の関係は，

$$\sigma_{x,y} = \frac{M_x}{I_z} y = E\varepsilon \tag{2.5}$$

となります．I_z は図 2.3 の平面に垂直な z 軸に関する断面２次モーメント，E はヤング率です．

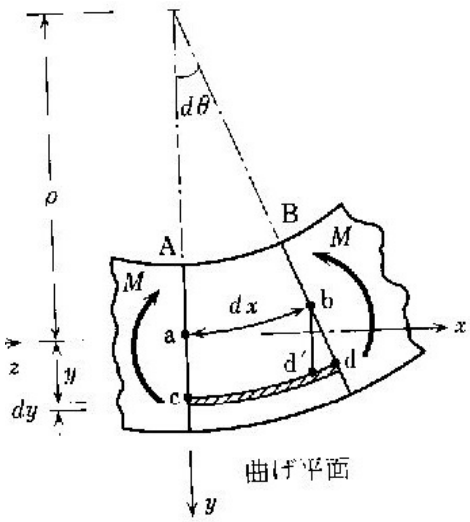


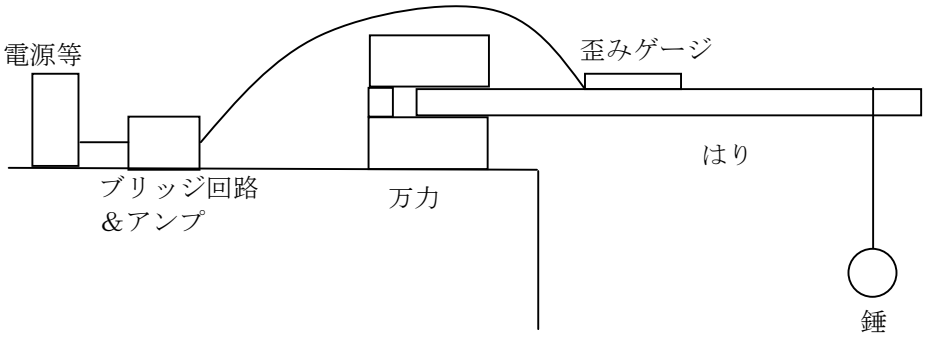
図２．３　単純曲げ

[前諮問]

1. 式(1.2)を導きなさい.
2. 式(2.4)を導きなさい.
3. 式(2.5)を導きなさい.
4. 長さ 1 m, 断面の外径 10 cm, 肉厚 1 cm の中空パイプで構成された片持ちはりを, 設計応力 100 MPa 以下で使用することを考える．その場合，片持ちはりの自由端に，はりの軸と垂直に加えることができる最大荷重を求めなさい．ただし，はりの自重とたわみは無視してよい.
5. 片持ちはりが自重によってある位置に生じる歪みを解析的に求めるために必要な物理量をすべてあげ，どのような方法を用いればそれらが測定できるか示しなさい.

[実験方法]

1. 歪みゲージの回路を製作する.
2. アンプの線形性を確認する.
3. はりの重さや大きさを測定し，固定位置や歪みゲージの接着位置を決める.
4. はりに歪みゲージを接着する（接着方法は別紙参照).
5. はりを万力で固定し，下図のような片持ちはりの状態にする.
6. 片持ちはりの様々な位置に様々な錘をぶら下げて荷重を加え, 歪みゲージの出力をテスターで測り記録する. 錘の位置などの後処理に必要な情報も忘れず記録すること.
7. 質量が不明な錘をはりにぶら下げて，はりの歪みを測定する.
8. 実験終了後，後片付けする.



[後諮問]

1. 歪みゲージの特徴（利点，欠点など）と，具体的にどのような場所や製品で使われているかを調べてまとめなさい.
2. 片持ちはりの様々な位置に様々な荷重を加えた場合の，曲げ応力と歪みの関係をグラフにし，それらの間の関係式を求めなさい（例えば，最小二乗法）．ただし，曲げ応力と歪みの関係式を求める場合は，プログラム（C でもエクセルでも可）を組んでも電卓を用いてもよいが，計算方法を明記すること（グラフソフトなどの機能を用いてはいけない）.
3. ２の結果を用いて，実験で使用したはりのヤング率を求めなさい.
4. ２の結果を用いて，質量が不明な錘を使ってはりに荷重を加え，歪みの測定結果から錘の質量を求めなさい．ただし，測定精度を明記すること．また，電子天秤の結果と比較し，誤差が生じる要因をあげ，より測定精度を高めるためにはどのような方法が考えられるか述べなさい.
5. 実際に世の中にある物体の中で，近似的に片持ちはりとみなせる物（例えば，木の枝，建設途中の橋の橋桁など）を一つあげ，その最大曲げ応力を見積もりなさい．ただし，計算のためにおいた仮定を明記すること．計算に必要な物理量などが不明な場合は推定値を用いてよいが，それがどのような方法を用いれば測定できるか示しなさい.

[参考資料]

工業数学 A～C，構造材料力学，弾塑性力学，工学計測原理，データ解析，の各講義の教科書や講義ノート