マクロ経済学第二
(社会工学科, 2015 前期, 推奨学期: 5)

ソロー・モデル (つづき)

大土井 涼二

社会理工学研究科/社会工学専攻

実証的視点

- 成長会計：技術進歩をどう測るか？
- ソロー・モデルで現実の成長プロセスを説明できるか？
  1. カルドアの定型化された事実
  2. 「収束仮説」の検証
  3. Lucas(1990) の分析
  4. ソロー・モデルの実証分析 (Mankiw, Romer, and Weil, 1992)

技術進歩率は現実にはどのような値か？

- 生産関数をコブ・ダグラス型に仮定

$$f(\widetilde{k}) = \widetilde{k}^{\alpha}$$

従って，$y_t = A_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha} (\because \widetilde{k}_t \equiv k_t / A_t)$.

- B_t を $A_t^{1-\alpha}$ と定義すると

$$\begin{aligned} y_t = B_t k_t^{\alpha} \Leftrightarrow \ \ln y_t &= \ln B_t + \alpha \ln k_t \\ \Rightarrow \ln y_{t+1} - \ln y_t &= (1-\alpha)(\ln A_{t+1} - \ln A_t) + \alpha \ln(k_{t+1} - \ln k_t) \end{aligned}$$

- g_t^x を変数 x の t 期から $t+1$ 期にかけての成長率とすると，上の式は以下のように近似できる

$$g_t^y = g_t^B + \alpha g_t^k. \tag{1}$$

成長会計

- (1 人当たり)GDP の成長率を，その要素の成長率に要因分解することを成長会計と呼ぶ.

- 現実には B_t (またはそのもとである A_t)，およびその成長率は観察できない．しかし，(1) 式より
$$g_t^B = g_t^y - \alpha g_t^k$$
このようにして求めた g_t^B をソロー残差　(Solow Residual) と呼ぶ.

- 注意：ソロー残差 $\simeq$ 技術進歩率
厳密には，ソロー残差は (1 人当たり)GDP 成長率のうち、１人当たり資本の成長率では説明できない要因

- 日本のソロー残差 (OECD のデータ)
3.2 (85-90), 1 (90- 95), 0.8(95-00), 1.4(00-05)

注意

- ソロー残差はコブ・ダグラス型に特定化しなくても導出できる.
- 通常はもっと多くの生産要素 (土地など) を加えた形で産出される.
- 成長会計は様々な分析に用いられている
  - 1965 年から 1990 年代に東アジア）の国々が急速な経済成長を遂げた

    日本, アジア NIEs4 カ国 (大韓民国、台湾、香港、シンガポール), ASEAN3 カ国 (インドネシア, マレーシア, タイ王国). 後に 1993 年に世界銀行が「東アジアの奇跡」というレポートを発表

  - Young (1995): finds that the high growth rate of Hong Kong, Singapore, South Korea, and Taiwan over the past three decades is almost entirely due to rising investment, increase in labor force participation, and increase in the level of education, but not to rapid technological progress.

Young の成長会計

- Young, A., 1995. "The Tyranny of Numbers: Confronting the Statistical Realities of the East Asian Growth Experience," *The Quarterly Journal of Economics*, 110(3), pp. 641-680.
  - 香港 (1966-91): 経済成長率 7.3%, 技術進歩 2.3%
  - シンガポール (1966-90): 経済成長率 8.7%, 技術進歩 0.2%
  - 韓国 (1966-90): 経済成長率 10.3%, 技術進歩 1.7%
  - 台湾 (1966-90): 経済成長率 9.4%, 技術進歩 2.6%

カルドアの定型化された事実

- カルドア (N. Kardor) は 1963 年の自身の有名な論文において，長期の経済成長過程において観察される 6 つの性質について言及している．

1. 1 人当たり生産量は長期にわたり一定率で成長してきた
2. 1 人当たり資本も時間を通じて増加し続けてきた
3. 資本産出比率はほぼ一定であった
4. 資本の収益率はほぼ一定であった
5. 資本分配率，労働分配率はほぼ一定であった
6. 1 人当たり生産量の成長率には国際的な差がある．

Lucas の分析

- Lucas, R.E., 1990. "Why doesn't capital flow from rich to poor countries?" *American Economic Review* 80(2), 92-96.

Assumption

どの国も, 同じコブ・ダグラス型の生産関数を有しているとしよう.

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} \;\Leftrightarrow\; \widetilde{y}_t = \widetilde{k}_t^{\alpha}$$

- 資本収益率 r_t: 企業の利潤最大化より,

$$\begin{aligned} r_t = MPK_t &= \alpha(A_t L_t / K_t)^{1-\alpha} \\ &= \alpha \widetilde{k}_t^{\alpha-1} \\ &= \alpha \widetilde{y}_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \\ &= \alpha (y_t / A_t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \end{aligned}$$

- すべての国が同じ技術水準 A_t を有していると仮定.

Lucas の分析

- Summers-Heston data set (Penn World Table) によれば, $y_t^{US}/y_t^{India} \simeq 15$ in 1988 ($t = 1988$).

$$\frac{r_t^{US}}{r_t^{India}} = \frac{\alpha(y_t^{US}/A_t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\alpha(y_t^{India}/A_t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \left(\frac{y_t^{US}}{y_t^{India}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

- $\alpha = 0.4$ にセットする． (an average of U.S. and Indian capital share). Then,

$$\frac{r_t^{US}}{r_t^{India}} = 15^{-1.5} \Leftrightarrow \frac{r_t^{India}}{r_t^{US}} = 15^{1.5} = 58.094\ldots$$

This implies that rate of return of capital in India must be about 58 times that in the United States.

Implication

1. このような資本収益率の大きな違いは、現実に見られない。
   - ただし，現実には資本は国際的に移動可能
   - $r^{US} < r^{India} \Rightarrow$ 資本は US からインドに流入
     $\Rightarrow k^{India} \uparrow, k^{US} \downarrow$
     $\Rightarrow r^{India} \downarrow, r^{US} \uparrow$
   - このようなプロセスを経て資本収益率の格差が解消されているのかもしれない
   - ではこのような先進国から途上国への資本流入は現実に観察されるか？
2. 58 倍もの収益率の差を解消させるほど大量の資本流入は観察されていない。

How should we redo?

- In the paper, Lucas said: "(t)he assumption that give rise to this example must be drastically wrong, but exactly waht is wrong with them, and what assumptions should replace them?"
- Lucas の提案：　人的資本　$\Leftrightarrow$ 教育獲得などによって得られる能力に着目
  - 生産関数
    $$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha+\beta} = A K_t^{\alpha} (h_t L_t)^{1-\alpha} h_t^{\beta}$$
    と特定化．ここで，h_t が人的資本
  - 有効労働力 $= h_t L_t$
    $$\widetilde{y}_t = \widetilde{k}_t^{\alpha} h_t^{\beta}$$
  - $\beta = 0$ ならば，労働集約的技術水準 A_t を「労働者 1 人に付与される能力 (人的資本)」におき直したもの．
  - Lucas は h^{β} の項を External Benefits of Human Capital と呼んでいる．

How should we redo?

- 資本収益率

$$r_t = MPK_t = \alpha \widetilde{k}_t^{\alpha-1} h_t^{\beta}$$
$$= \alpha (y_t/h_t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} h_t^{\beta/\alpha}$$

$$\frac{r_t^{US}}{r_t^{India}} = \frac{\alpha (y_t^{US}/h_t^{US})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} (h_t^{US})^{\beta/\alpha}}{\alpha (y_t^{India}/h_t^{India})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (h_t^{India})^{\beta/\alpha}}$$

Note: $h_t^{US} \neq h_t^{India}$

- Exercize 1. $\beta = 0$ と仮定
  According to Penn World Table, $\frac{y_t^{US}/h_t^{US}}{y_t^{US}/h_t^{US}} = 3$

$$\therefore \frac{r_t^{India}}{r_t^{US}} = 3^{1.5} = 5.196$$

$\Rightarrow$ だいぶ緩和

How should we redo?

- Exercize 2. β を推定 $\Rightarrow \beta = 0.36$.
  - この結果と，Kruger (1968, Economic Journal) の分析結果：「1 人の US 労働が 5 人のインド人労働に相当」を踏まえると。。。

$$h^{US} \times 1 = h^{India} \times 5 \Leftrightarrow \frac{h^{US}}{h^{India}} = 5$$

$$\therefore \frac{r_t^{India}}{r_t^{US}} = 3^{1.5} \times 5^{-1} = 1.04.$$

MRW の分析

- Mankiw, N.G, D. Romer, and D. Weil, 1992. "A contribution to the empirics of economic growth," *Quarterly Journal of Economics* 107(2), 407-437.

Assumption

どの国も, 同じコブ・ダグラス型の生産関数を有しているとしよう.

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} \;\Leftrightarrow\; \widetilde{y}_t = \widetilde{k}_t^{\alpha}$$

Assumption

経済は定常状態に達しているとする.

定常状態の条件：$s\widetilde{k}^{*\alpha} = (\delta + n + (1+n)g^A)\widetilde{k}^*$

$$\therefore \widetilde{k}^* = \left[\frac{s}{\delta + n + (1+n)g^A}\right]^{1/(1-\alpha)} \simeq \left[\frac{s}{\delta + n + g^A}\right]^{1/(1-\alpha)}$$

MRW の分析

- $y_t/A_t = \widetilde{y}_t$ より

$$y_t = A_t \widetilde{k}_t^{\alpha}$$

Substituting the obtained $\widetilde{k}^*$ into the above equation,

$$y_t = A_t \left[\frac{s}{\delta + n + g^A} \right]^{\alpha/(1-\alpha)}$$

- Taking a logarithms of each side, we can obtain the following empirically testable equation

$$\ln y_t = \ln A_t + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln s - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(\delta + n + g^A)$$

MRW の分析

- $A_t = (1+g^A)A_{t-1}$ より，　$A_t = (1+g^A)^t A_0$.

$$\ln A_t = \ln A_0 + t\ln(1+g^A)$$

- 以下を仮定

$$\ln A_0 = a + \epsilon$$

where a is a constant and ϵ is a country-specific shock.

- 従って，$t=0$ としたときの 1 人当たり所得の対数値は

$$\ln y_0 = a + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln s - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\delta+n+g^A) + \epsilon$$

  - ϵ は s や n とは独立であると仮定 $\Rightarrow$ OLS が使える
  - $\alpha = rK/Y$ は大体 0.3〜0.4 の値．たとえば $\alpha = 1/3$ とすると，$\alpha/(1-\alpha) = 0.5$.
    $\Rightarrow$　理論通りなら $\ln s$ の係数の推定値は 0.5, $\ln(\delta+n+g^A)$ の係数の推定値は-0.5 のあたりになるはず

MRW の分析

$$\ln y_0 = a + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln s - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\delta + n + g^A) + \epsilon$$

- Assume that g^A and δ are constant across countries (pp.410), and assume $g^A + \delta$ is 0.05(413).
- Data: the Summers-Heston data set (Penn World Table): 98 Non-Oil countries, 75 Non-Oil countries except for grade D countries, and 22 OECD countries
- The date are annual and cover the period 1960-1985.
  1. n... the average growth rate of working age population over 1960-1985, where working age is defined as 15-64.
  2. s... the average share of real investment (including government investment) in real GDP,
  3. y... real GDP in 1985 divided by the working-age population in that year.

MRW の分析

TABLE I
ESTIMATION OF THE TEXTBOOK SOLOW MODEL

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	5.48	5.36	7.97
	(1.59)	(1.55)	(2.48)
ln(I/GDP)	1.42	1.31	0.50
	(0.14)	(0.17)	(0.43)
$\ln(n + g + \delta)$	−1.97	−2.01	−0.76
	(0.56)	(0.53)	(0.84)
$\bar{R}^2$	0.59	0.59	0.01
s.e.e.	0.69	0.61	0.38
Restricted regression:			
CONSTANT	6.87	7.10	8.62
	(0.12)	(0.15)	(0.53)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	1.48	1.43	0.56
	(0.12)	(0.14)	(0.36)
$\bar{R}^2$	0.59	0.59	0.06
s.e.e.	0.69	0.61	0.37
Test of restriction:			
p-value	0.38	0.26	0.79
Implied α	0.60	0.59	0.36
	(0.02)	(0.02)	(0.15)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05.

MRW の分析

- 大きく以下の 4 つの結果が得られた (pp.414)：
  1. 貯蓄率と人口成長率に関する係数の符号は理論的予測と一致．かつ 3 種類のサンプルのうち，2 つのサンプルに関しての推定値が有意
  2. $\ln s$ と $\ln(n+\delta+g)$ の符号の絶対値が等しいという制約は棄却できない (p-value に着目)
  3. High R^2
  4. 推定された α は 1/3 をはるかに上回る
     $\Rightarrow$ ソロー・モデルが現実を上手く説明できていない可能性
- 生産関数を

$$Y_t = K_t^{\alpha}(h_t L_t)^{\beta}(A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

に変更して推計．$\Rightarrow$ α の値は小さく $\Rightarrow$ ソロー・モデルの説明力改善

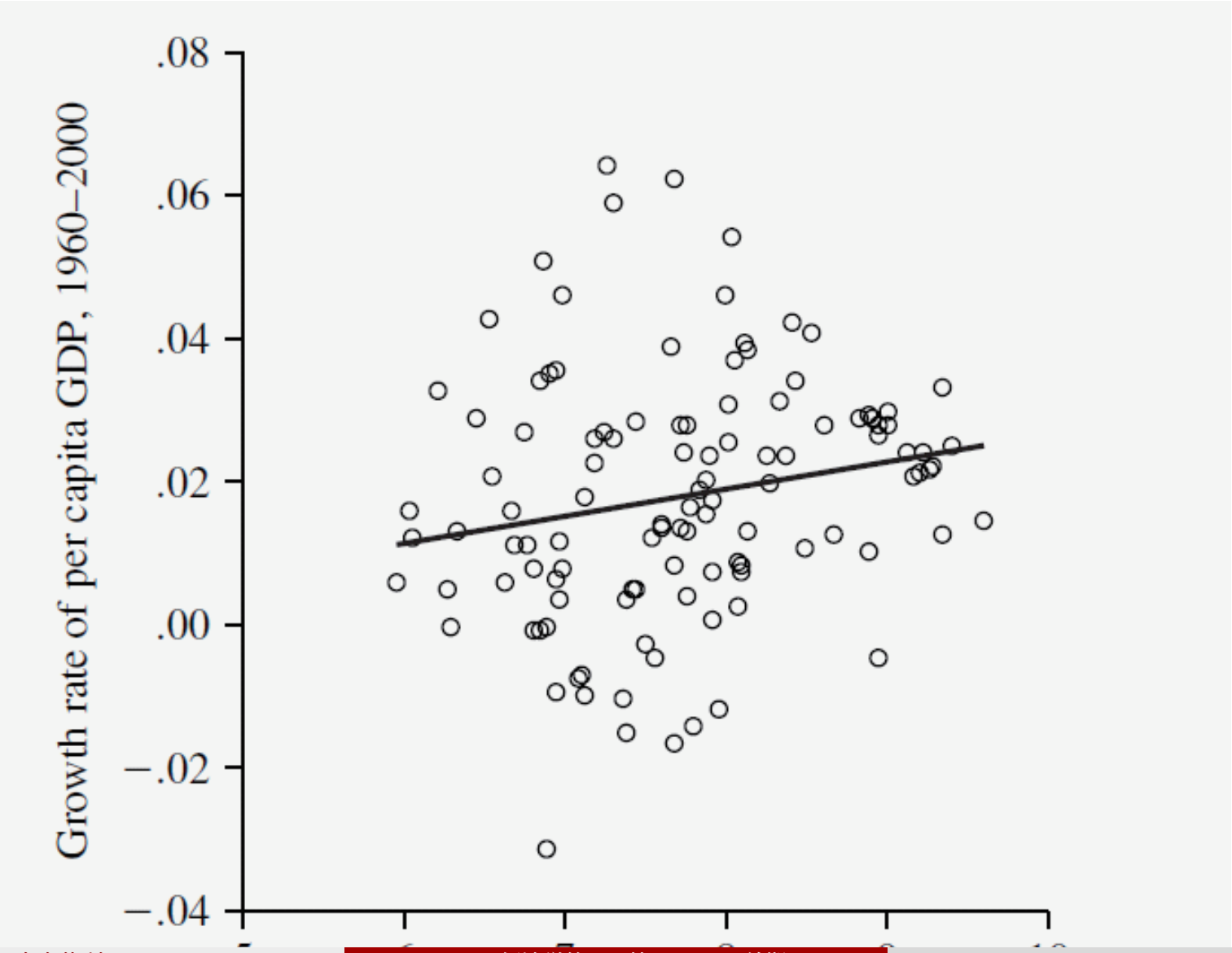
収束 (convergence)

- 収束の概念
  1. 絶対収束 ··· ある時点で所得水準が異なる国が，長期的に所得水準が同じになる．

     ⇒ 貯蓄率や人口成長率，資本減耗率が同じでなければならない．

  2. 条件付収束 ··· 貯蓄率や人口成長率の違いを反映したそれぞれの定常状態に収束

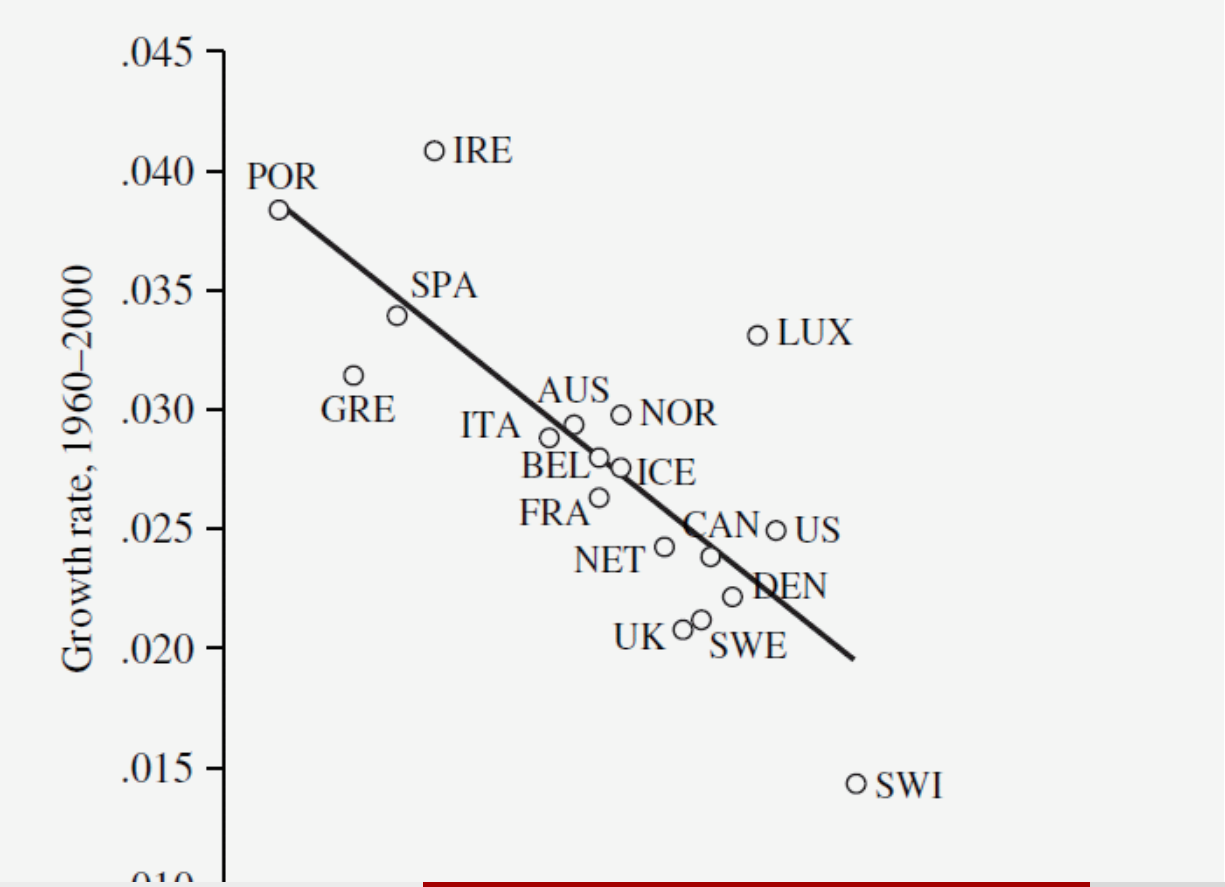
収束 (convergence)



収束 (convergence)

サンプルをOECD (since 1961)の
発足当初の原加盟国に限った場合

注:
オリジナルメンバー国18国のうち、データ欠損によりドイツは略. またトルコも1961年の発足当時先進国とはいえないため削除



収束 (convergence)

- 収束のテスト方法
  1. β 収束: 以下を推定
     $$\gamma_i^y = a + \beta y_{i0} + \epsilon$$
     i は国. $\beta < 0$ であれば収束が成立しているといえる.
  2. σ 収束：1 人当たり GDP の分布を調べ，分散が時間を通じて小さくなっているかどうかを調べる.
     $\Rightarrow$ ツインピークスの発見

まとめ

- 定常状態では 1 人当たり GDP や資本の成長率は技術進歩率と等しくなり均斉成長が達成される.
- 貯蓄率の上昇は，1 人当たり GDP の成長を促すが，それは短期的であり，新たな定常状態に近づくにつれて減速し，元の成長率に戻る．定常状態の消費を最大にする資本水準を黄金律と呼ぶ.
- ソロー・モデルが現実の経済成長を説明するのにどの程度役に立つのか，について多くの実証研究がある.