事例２－３（ナッシュ均衡が存在しない例）

B	ドラマ		バラエティ	
A				
ドラマ	7	3	4	6
バラエティ	5	5	6	4

下線の重なるところなし

→ 両プレイヤーともに最適反応になる戦略の組なし

（ド ，ド×） → （ド×，バ ）

→ （バ ，バ×） → （バ×，ド ）

↓

× 最適反応にならない

混合戦略

		q		1－q	
	B	ドラマ		バラエティ	
	A				
p	ドラマ	7	3	4	6
1－p	バラエティ	5	5	6	4

混合戦略　A　$\mathbf{p} = (p, 1-p)$,　$0 \le p \le 1$　(⇔ 純粋戦略)

B　$\mathbf{q} = (q, 1-q)$,　$0 \le q \le 1$

期待利得　$E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4pq - 2p - q + 6$

$E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4pq + 2p + q + 4$

ナッシュ均衡の求め方

B の $\mathbf{q} = (q, 1-q)$ に対する A の最適反応戦略

$$\max_{\mathbf{p}} E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_p (4pq - 2p - q + 6)$$

$$4pq - 2p - q + 6 = p(4q - 2) - q + 6$$

$4q - 2 > 0$ $(q > 1/2)$ $\rightarrow$ $p = 1$

$4q - 2 < 0$ $(q < 1/2)$ $\rightarrow$ $p = 0$

$4q - 2 = 0$ $(q = 1/2)$ $\rightarrow$ すべての p

同様に，A の $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ に対する B の最適反応戦略

$$-4pq + 2p + q + 4 = q(-4p + 1) + 2p + 4$$

$-4p + 1 > 0$ $(p < 1/4)$ $\rightarrow$ $q = 1$

$-4p + 1 < 0$ $(p > 1/4)$ $\rightarrow$ $q = 0$

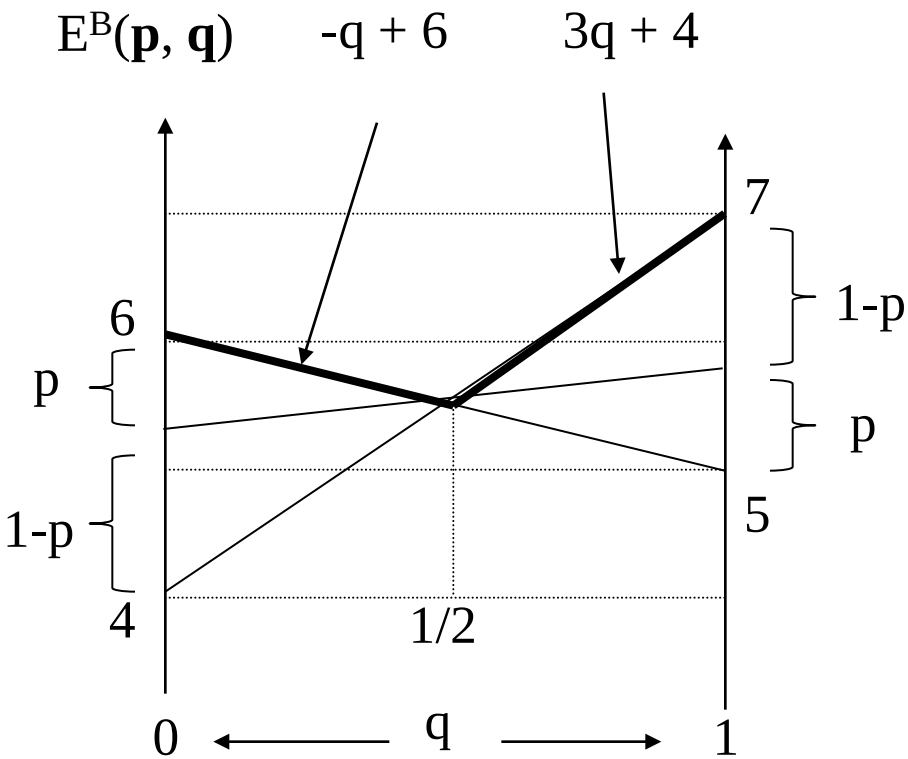
$-4p + 1 = 0$ $(p = 1/4)$ $\rightarrow$ すべての q

最適反応戦略の求め方（別法）

Aの期待利得：　ドラマ　→　$7q+4(1-q)=3q+4$

バラエティ　→　$5q+6(1-q)=-q+6$

$\Rightarrow$　$p(3q+4)+(1-p)(-q+6)$



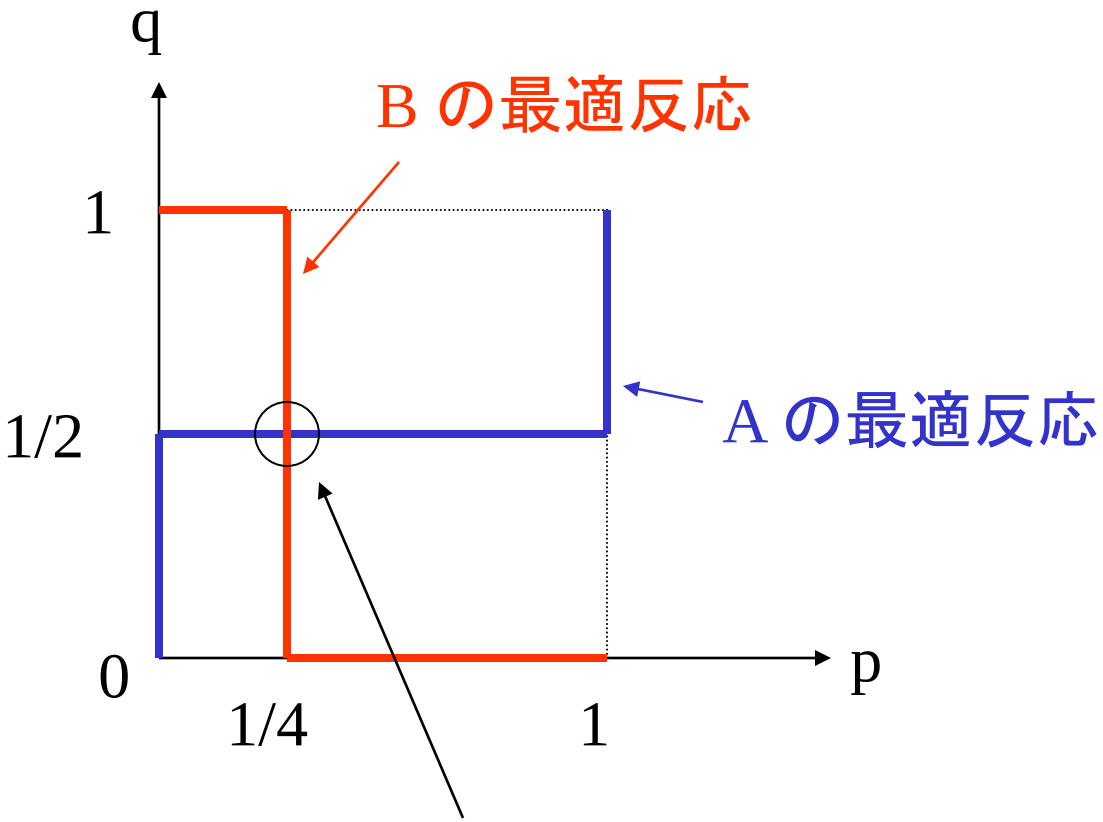
		q		1-q	
	B	ドラマ		バラエティ	
	A				
p	ドラマ	7	3	4	6
1-p	バラエティ	5	5	6	4

$0 \leqq q \leqq 1/2$　バラエティ（p=0）が最適

$1/2 \leqq q \leqq 1$　ドラマ（p=1）が最適

<u>Bも同様</u>

ナッシュ均衡の求め方



ナッシュ均衡　((1/4, 3/4), (1/2, 1/2))

混合戦略まで考えたときのナッシュ均衡 （注意）

１　各プレイヤーの純粋戦略の数が有限個

→　混合戦略まで考えれば,

ナッシュ均衡は必ず少なくとも１つ存在する。

２　純粋戦略の範囲でのナッシュ均衡

→　混合戦略まで考えてもナッシュ均衡

（（弱）支配戦略の組

→　混合戦略まで考えてもナッシュ均衡）

３　支配戦略の組

→　混合戦略まで考えても唯一つのナッシュ均衡

パレート支配

B	維持	引き下げ
A		
維持	4 4	1 6
引き下げ	6 1	2 2

（維持，維持）は（引き下げ，引き下げ）を<u>パレート支配</u>する

4 ＞ 2，4 ＞ 2

どの戦略の組からもパレート支配されない戦略の組

→ <u>パレート最適，パレート効率的</u>

パレート弱支配

B	維持	引き下げ
A		
維持	4	1
	2	6
引き下げ	6	2
	1	2

（維持，維持）は（引き下げ，引下げ）を<u>パレート弱支配</u>する

4 ＞ 2，4 ＝ 2

どの戦略の組からもパレート弱支配されない戦略の組

→ <u>強パレート最適，強パレート効率的</u>

マックスミニ戦略

相手が自分にとって最悪の行動をとると仮定
その中で最善の行動をとる

→ 各戦略について自分の最小（ミニ）の利得をとり，
その中で最大（マックス）の利得を与える戦略をとる

→ マックスミニ戦略

事例２－３のマックスミニ戦略

事例２－３

B	ドラマ		バラエティ	
A				
ドラマ	7	3	4	6
バラエティ	5	5	6	4

A　ドラマ　　min（7，4）＝4，

バラエティ　min（5，6）＝5，　max（4，5）＝5

A のマックスミニ戦略　バラエティ，　マックスミニ値　5

B　ドラマ　　min（3，5）＝3，

バラエティ　min（6，4）＝4，　max（3，4）＝4

B のマックスミニ戦略　バラエティ，　マックスミニ値　4

マックスミニ戦略とナッシュ均衡

事例２－３

B	ドラマ		バラエティ	
A				
ドラマ	7	3	4	6
バラエティ	5	5	6	4

マックスミニ戦略の組　（バラエティ，バラエティ）

ナッシュ均衡ではない

B のバラエティは A のバラエティに対する最適反応ではない

(A のバラエティは B のバラエティに対する最適反応）

混合戦略におけるマックスミニ戦略（1／5）

B	ドラマ		バラエティ	
A				
ドラマ	7	3	4	6
バラエティ	5	5	6	4

混合戦略　A　$\mathbf{p} = (p, 1-p)$,　$0 \leq p \leq 1$

B　$\mathbf{q} = (q, 1-q)$,　$0 \leq q \leq 1$

期待利得　$E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4pq - 2p - q + 6$

$E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4pq + 2p + q + 4$

混合戦略におけるマックスミニ戦略（２／５）

Ａのマックスミニ戦略

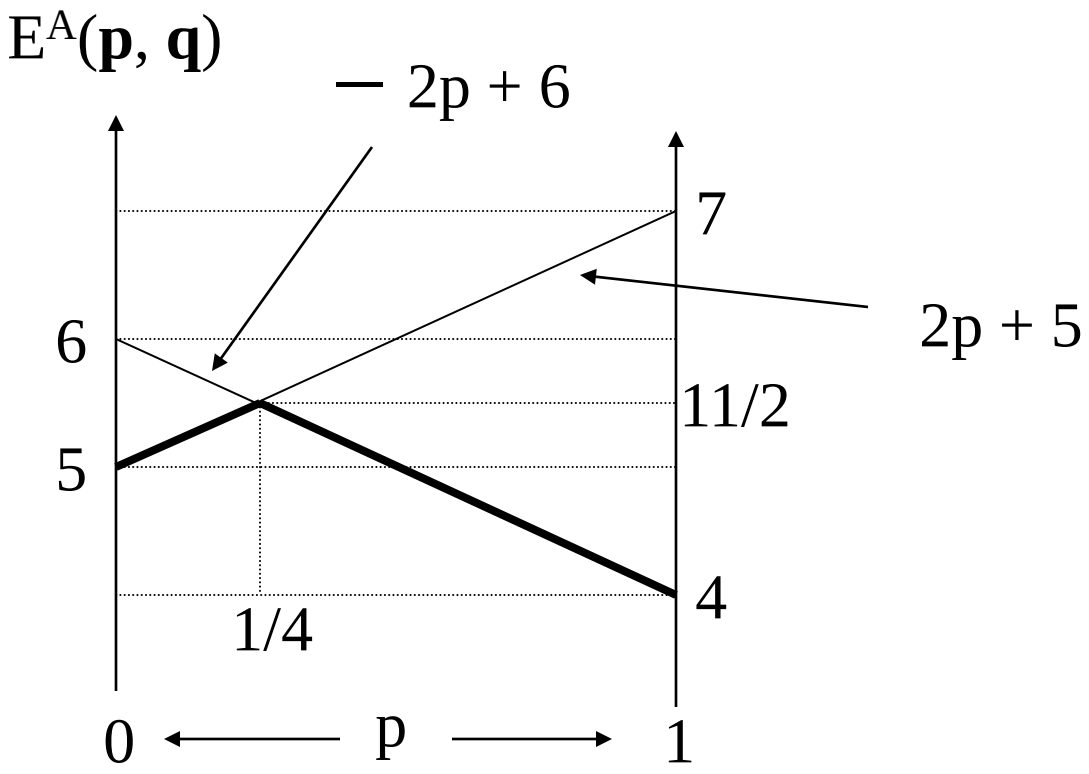
期待利得　$E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4pq - 2p - q + 6$

$$\min_{\mathbf{q}} E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_q (4pq - 2p - q + 6)$$

$$4pq - 2p - q + 6 = q(4p - 1) - 2p + 6$$

$4p - 1 > 0$	$(p > 1/4)$	$\rightarrow$ $q = 0$	$-2p + 6$
$4p - 1 < 0$	$(p < 1/4)$	$\rightarrow$ $q = 1$	$2p + 5$
$4p - 1 = 0$	$(p = 1/4)$	$\rightarrow$ すべての q	$11/2$

混合戦略におけるマックスミニ戦略 （３／５）



A のマックスミニ戦略　　(1/4, 3/4)

マックスミニ値　　11/2

混合戦略におけるマックスミニ戦略（４／５）

Ｂ のマックスミニ戦略

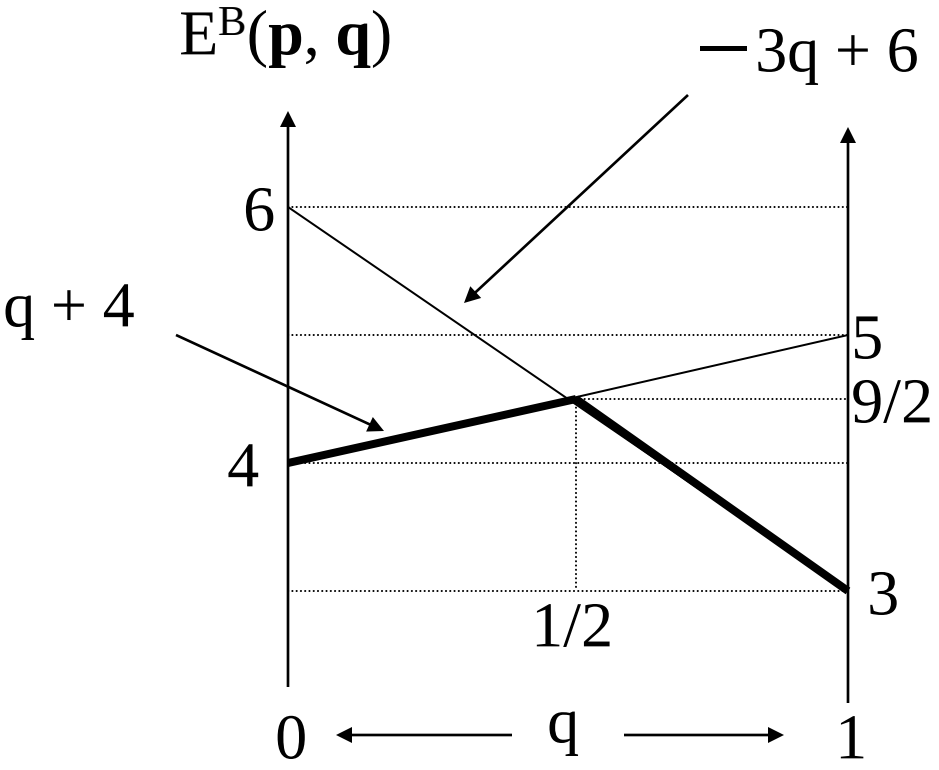
期待利得　$E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4pq + 2p + q + 4$

$$\min_{\mathbf{p}} E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_p (-4pq + 2p + q + 4)$$

$$-4pq + 2p + q + 4 = p(-4q + 2) + q + 4$$

$-4q + 2 > 0$ $(q < 1/2)$	$\rightarrow$ $p = 0$	$q + 4$
$-4q + 2 < 0$ $(q > 1/2)$	$\rightarrow$ $p = 1$	$-3q + 6$
$-4q + 2 = 0$ $(q = 1/2)$	$\rightarrow$ すべての p	$9/2$

混合戦略におけるマックスミニ戦略 （５／５）



B のマックスミニ戦略 (1/2, 1/2), マックスミニ値 9/2

マックスミニ戦略の組 ((1/4, 3/4), (1/2, 1/2)) → ナッシュ均衡

定和ゲームとゼロ和ゲーム

事例２－３

A ＼ B	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	7	3	4	6
バラエティ	5	5	6	4

Ａの利得 ＋ Ｂの利得 ＝ １０（一定） → <u>定和ゲーム</u>

<u>５０％からの増減を考えると</u>

A ＼ B	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	2	－2	－1	1
バラエティ	0	0	1	－1

Ａの利得 ＋ Ｂの利得 ＝ ０ → <u>ゼロ和ゲーム</u>

定和ゲームとゼロ和ゲームは数学的に同等

→ どちらで分析してもよい

ゼロ和ゲーム

A＼B	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	2	−2	−1	1
バラエティ	0	0	1	−1

一方の利得だけで表現できる（他方は符号が反対）

A＼B	ドラマ	バラエティ
ドラマ	2	−1
バラエティ	0	1

→ （2x2）行列ゲーム

ゼロ和ゲームにおけるマックスミニ戦略

B	ドラマ		バラエティ	
A				
ドラマ	2	−2	−1	1
バラエティ	0	0	1	−1

$$E^A(p, q) = 2pq - p(1-q) + (1-p)(1-q) = 4pq-2p-q+1$$

$$E^B(p, q) = -2pq + p(1-q) - (1-p)(1-q) = -4pq+2p+q-1$$

注意: $\underline{E^B(p, q) = -E^A(p, q)}$

ゼロ和ゲームにおけるマックスミニ戦略

A のマックスミニ戦略

$$\max_p(\min_q(E^A(p, q)))$$

B のマックスミニ戦略

$$\max_q(\min_p(E^B(p, q)))$$

$$= \max_q(\min_p(-E^A(p, q)))$$

$$= \max_q(-\max_p(E^A(p, q)))$$

$$= -\min_q(\max_p(E^A(p, q)))$$

→ B のマックスミニ戦略を

（A の利得に関する）ミニマックス戦略　ともいう

$\min_q(\max_p(E^A(p, q)))$　を

（A の利得に関する）ミニマックス値という

（A の利得に関する）ミニマックス値 ＝ －（B のマックスミニ値）

ミニマックス定理

ミニマックス定理

２人のプレイヤーが有限個の純粋戦略を持つ２人ゼロ和ゲームにおいて，混合戦略まで考えれば，

$$\max_p(\min_q(E^A(p, q)) = \min_q(\max_p (E^A(p, q)))$$

マックスミニ値　＝　ミニマックス値

von Neumann and Morgenstern

２人ゼロ和ゲームにおける　ミニマックス定理

↓

Nash

多人数非ゼロ和ゲームにおけるNash均衡の存在定理

マックスミニ戦略とナッシュ均衡

２人ゼロ和ゲームにおいて，

（１） (p, q) がナッシュ均衡であるとする。このとき，
p, q はプレイヤー A，B のマックスミニ戦略である。

（２） p’, q’ がプレイヤー A，B のマックスミニ戦略であるとする。
このとき，<u>マックスミニ値＝ミニマックス値であれば</u>，
(p’, q’) はナッシュ均衡である。

注意：

（１） ミニマックス定理により，混合戦略まで考えれば，マックスミニ戦略の組はナッシュ均衡になる。

（２） ２人非ゼロ和（非定和）ゲームでは，マックスミニ戦略の組は，ナッシュ均衡にはならない．

利得と効用

男女のジレンマ

B	サッカー		映画	
A				
サッカー	2	1	0	0
映画	0	0	1	2

A がサッカー，映画を 1/2 の確率，B がサッカーのときの

A の期待利得　$2 \times 1/2 + 0 \times 1/2 = 1$

A, B　ともに映画のときの

A の利得　1

利得　→　金銭の値ではなく，効用（満足度）

効用の期待値をとることはできるのか？　　できる！

→　フォン・ノイマン－モルゲンシュテルン効用

次回までの課題

◎Reading assignment

ゲーム理論入門　38～68ページ（68ページの練習問題を含む）

演習ゲーム理論　例題2.1, 演習問題2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12
例題3.2, 3.3, 演習問題3.2

(「ゲーム理論」第3章）

◎Homework（次回の授業時間に提出）

１．事例2-1, 2-2において混合戦略まで考えたときのナッシュ均衡を求めよ。

２．事例2-1, 2-2においてプレイヤーA, Bのマックスミニ戦略を求め，
その組がナッシュ均衡とならないことを確かめよ。

３.「ゲーム理論入門」 p68の練習問題の2

４.「演習ゲーム理論」問題2.1, 2.2, 2.3, 2.4

５．練習問題　3.3, 3.4, 3.7, 3.9, 3.11

＊Homeworkの提出にはA4版用紙を用い，2枚以上の場合には左上1箇所をホッチキス止めすること。OCWにアップしてある表紙を付けること