

(学科

学籍番号

氏名

)

1. (ブール代数)

ブール代数の以下の演算法則を講義で使用している演算記号を用いて式で示せ。変数は x, y, z を用いて演算記号を入れ替えた対となる式も一緒に示すこと。

(a) 結合律

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(b) 交換律

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

(c) 分配律

$$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y)(x \vee z), \quad x \cdot (y \vee z) = xy \vee xz$$

(d) べき等律

$$x \cdot x = x, \quad x \vee x = x$$

(e) 吸収律

$$x \vee (x \cdot y) = x, \quad x \cdot (x \vee y) = x$$

(f) 相補律

$$x \vee \bar{x} = 1, \quad x \cdot \bar{x} = 0$$

(g) ド・モルガンの定理

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

2. (包含関係)

次の包含関係と等価な式を包含関係の記号を使わずに NOT, AND, OR と等号, 0, 1 を使ってできるだけ簡単に示せ。

$$(x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z) \leq (\bar{x} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})$$

$$\underbrace{(x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)}_{\text{"}} \vee \underbrace{(\bar{x} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})}_{\text{"}} = 1$$

$$\underbrace{(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee (\bar{y} \vee z) \vee (\bar{x} \vee y \vee z)}_{\text{"}}$$

$$\bar{x}z \vee y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z} &= (\bar{x} \vee \bar{z})(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\bar{y} \\ &= \bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \\ &= \bar{x} \vee \bar{z} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{\bar{x} \vee \bar{z}} = 1}$$

(学科

学籍番号

氏名

)

3. (論理関数の表現形式)

次の表に定義する論理関数 $f(x, y, z)$ を以下の各形式で表現せよ。

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(a) 極小項表現

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$$

(b) 極大項表現

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$$

(c) リード・マラー表現

$$f(x, y, z) = xy \oplus y \oplus z$$

(d) NAND だけを3段にを使って表現 (3段とは回路の段数。その回路を式で示す。式は簡単化しなくて良い。) (a) にド・モルガンの定理を適用

$$f(x, y, z) = \overline{(\overline{(\bar{x}x)}(\bar{y}y)z)} \cdot \overline{(\overline{(\bar{x}x)}y(\bar{z}z))} \cdot \overline{(x\bar{y}z)} \cdot \overline{(x,y,z)}$$

(d) NOR だけを3段にを使って表現 (回路が3段となる。その回路を式で示す。式は簡単化しなくて良い。) (b) にド・モルガンの定理を適用

$$f(x, y, z) = \overline{(x \vee y \vee z) \vee (x \vee (\bar{y} \vee \bar{z})) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (y \vee z) \vee z)}$$

4. (論理代数方程式)

二値変数 x, y, a, b の間に次の二つの式が成り立っているときに、(a) まず x の解が存在する条件を求めよ。(b) この条件を満たす y の値を a, b 及び任意の値を表す α のみを使って表せ。(c) また (a) の条件が満たされる時に x の解を y と a, b 及び任意の値を表す β のみを使って表せ。

$$x \vee ay \vee b = ax \vee b\bar{y}$$

$$\begin{aligned} & \overline{ax}y \vee bx \leq ax \vee b\bar{y} \\ & \downarrow \text{標準形に変形} \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\overline{(a\bar{x}y \vee bx)} \vee (ax \vee b\bar{y}) = 1$$

左辺の x に 0 を代入

$$\begin{aligned} & \overline{a\bar{0}y \vee b0} \vee (a0 \vee b\bar{y}) = 1 \\ & = \overline{a\bar{y} \vee 0} \vee (0 \vee b\bar{y}) \\ & = \overline{a\bar{y}} \vee b\bar{y} \end{aligned}$$

左辺の x に 1 を代入

$$\overline{b \vee a} \vee b\bar{y} = \bar{b} \vee a \vee b\bar{y}$$

$$\begin{aligned} & (x \vee ay \vee b)(ax \vee b\bar{y}) \vee (\overline{x \vee ay \vee b})(\overline{ax \vee b\bar{y}}) = 1 \\ & \text{右の } x \text{ に 0 を代入} \\ & (a\bar{y} \vee b) \vee b\bar{y} \vee (a\bar{y} \vee b) \vee \bar{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \bar{b}\bar{y} \vee (a\bar{y} \vee b) = \bar{b}\bar{y} \vee (a \vee \bar{y})\bar{b} \\ & = \bar{b} \vee a\bar{b} \end{aligned}$$

左辺の x に 1 を代入

$$\begin{aligned} & (a \vee b\bar{y}) \vee 0 \\ & = a \vee b\bar{y} \end{aligned}$$

(学科

学籍番号

氏名

)

(4. の回答の続き)

両式の標準形 ①, ② の左辺の AND をとった
ものが 1 となるようにする。
 $F(x, y, a, b)$ とすると 解の存在条件は

$$F(0, y, a, b) \vee F(1, y, a, b) = 1$$

$$(\bar{y} \vee \bar{a} \bar{b}) (\bar{a} \vee \bar{y} \vee b) \vee (a \vee b \bar{y}) (\bar{b} \vee a \vee \bar{y})$$

$$\bar{y} \vee \bar{a} \bar{b} \vee \bar{a} \vee \bar{y} \vee b \vee a \vee b \bar{y} \vee a \vee \bar{y} \vee \bar{b} \vee a \vee \bar{y}$$

$$\bar{a} \bar{b} \vee \bar{y} \vee a = \boxed{\bar{b} \vee \bar{y} \vee a = 1} \quad \text{(a) 解の存在条件の等}$$

この左辺を $G(y, a, b)$ とすると $y = G(0, a, b) \vee \alpha G(1, a, b)$

x の解は

$$x = F(0, y, a, b) \vee \beta F(1, y, a, b)$$

$$= \alpha (a \vee \bar{b}) \quad \text{(b) の等}$$

$$= \bar{a} \bar{b} \vee \bar{y} \vee \beta a = \boxed{(a \vee b) \bar{y} \vee \beta a} \quad \text{(c) の等}$$

5. (ユネイト関数と自己双対関数)

次の真理表には3変数の論理関数 $f(x, y, z)$ を8通り定義している。これらの8通りの関数 $f_1, f_2, \dots, f_8$ が自己双対関数となるように表の空欄を埋めよ。またこれらの中でユネイト関数になっているものがあれば、それを示せ。また3変数の論理関数 $f(x, y, z)$ の中に自己反双対関数かつユネイト関数になるものがあれば、それをすべて $f_1, f_2, \dots, f_8$ と重複しても良いので、次表の空いている欄 ($g_1, g_2, \dots, g_8$) の一部を使って示せ。

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1						
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1						
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1						
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1						
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0						
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0						
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0						
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1						

ユネイト関数は $f_1, f_2, f_4, f_6, f_7, f_8$

自己反双対関数でユネイト関数になる

のは 定数のみ