

2015 年度 論理回路理論 演習 2 解答

学科 _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 次式を真理値表, あるいは, 式変形を用いて証明せよ. (8 点× 3)

(1) $x \oplus \bar{y} \oplus z \leq x \vee \bar{y} \vee z$

(2) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz \leq x \vee z$

(3) $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) = y \vee xz$

解答

(1) 真理値表、式変形いずれの解答方法も可。≤の式を =の式に直せば部分点 4 点。

x	y	z	$x \oplus \bar{y} \oplus z$	$x \vee \bar{y} \vee z$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

(2) 真理値表、式変形いずれの解答方法も可。≤の式を =の式に直せば部分点 4 点。

$$\begin{aligned}
 (\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz)\overline{(x \vee z)} &= (\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz)\bar{x}\bar{z} \\
 &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(3) 真理値表、式変形いずれの解答方法も可。

$$\begin{aligned}
 (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) &= ((x \vee y) \vee z)((x \vee y) \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z) \quad (\text{部分点} \cdot 4 \text{ 点}) \\
 &= (x \vee y)(\bar{x} \vee y \vee z) \\
 &= y \vee x(\bar{x} \vee z) \\
 &= y \vee xz
 \end{aligned}$$

2. $F(x, y, z) = x\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}$ は x において正である. この論理関数について以下の問に答えよ.

(1) $F(x, y, z)$ の双対関数を求めよ. (8 点)

(2) $F(x, y, z)$ の双対関数も x において正であることを証明せよ.

(ただし, 教科書の定理 3.1~3.6(p51~53) を用いずに, p51 の式 (3.4) のように, 注目する変数に 0,1 を代入した関数値の包含関係によって証明せよ) (8 点)

(3) 一般に x_i において正である論理関数 $F(\dots, x_i, \dots)$ の双対関数は再び x_i において正となることを示せ. (10 点)

解答

(1)

$$\begin{aligned} F_d(x, y, z) &= \overline{F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad (\text{部分点} \cdot 4 \text{ 点}) \\ &= \overline{\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z} \\ &= (x \vee \bar{y})(x \vee z)(y \vee \bar{z}) \\ &= (x \vee \bar{y}z)(y \vee \bar{z}) \\ &= xy \vee x\bar{z} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} F_d(0, y, z) &= 0 \\ F_d(1, y, z) &= y \vee \bar{z} \\ \overline{F_d(0, y, z)} \vee F_d(1, y, z) &= 1 \quad (\text{部分点} \cdot 4 \text{ 点}) \end{aligned}$$

したがって $F_d(x, y, z)$ は x について正.

(3) $F_d(\dots, x_i, \dots) = \overline{F(\dots, \bar{x}_i, \dots)}$ が成り立つので

$$\begin{aligned} F_d(\dots, 0, \dots) &= \overline{F(\dots, 1, \dots)} \\ F_d(\dots, 1, \dots) &= \overline{F(\dots, 0, \dots)} \quad (\text{部分点} \cdot 3 \text{ 点}) \end{aligned}$$

また, $F(\dots, x_i, \dots)$ は x_i において正であるから

$$F_d(\dots, 0, \dots) \leq F(\dots, 1, \dots) \quad (\text{部分点} \cdot 3 \text{ 点})$$

両辺の否定を取ると

$$\overline{F_d(\dots, 0, \dots)} \geq \overline{F(\dots, 1, \dots)}$$

以上より $F_d(\dots, 1, \dots) \geq F_d(\dots, 0, \dots)$ となるので, $F_d(\dots, x_i, \dots)$ も x_i について正である.

3. 以下の論理関数は自己双対関数となるか否かを示せ．真理値表を用いて構わない．(10 点× 2)

(1) $xyz \vee \bar{x}yz \vee y\bar{z}$

(2) $xz \oplus y\bar{z} \oplus xw \oplus \bar{z}\bar{w}$

解答

(1) 組み合わせ表は以下のようになり，鏡像の要素が互いに NOT の関係にあるのでこれは自己双対関数である．

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

組み合わせ表が示されていれば部分点・5 点．

(2) 組み合わせ表は以下のようになり，鏡像の要素が互いに NOT の関係にないのでこれは自己双対関数ではない．

x	y	z	w	$f(x, y, z, w)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

組み合わせ表が示されていれば部分点・5 点．

4. 論理関数 $L(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ が線形関数であるための必要十分条件は,

$$\forall x_i, L(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, 0, x_{i-1}, \dots, x_1) \oplus L(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, 1, x_{i-1}, \dots, x_1) = a_i$$

ただし, $a_i = 1$ もしくは 0 .

である.

また, 線形関数は必ず自己双対関数か自己反双対関数のいずれかである.

以上の点を踏まえて, 次の双対関数が線形であるか否かを理由とともに示せ. (10 点×3)

(1) $xy \vee \bar{y}z \vee (x \oplus y)y$

(2) $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

(3) $wxyz \vee \bar{w}\bar{x}yz \vee \bar{w}x\bar{y}z \vee \bar{w}xy\bar{z} \vee w\bar{x}\bar{y}z \vee w\bar{x}y\bar{z} \vee wx\bar{y}\bar{z} \vee \bar{w}x\bar{y}\bar{z}$

解答

(1) $f(x, y, z) = xy \vee \bar{y}z \vee (x \oplus y)y$ とおく,

$$\begin{aligned} f(0, y, z) \oplus f(1, y, z) &= (y \vee \bar{y}z \vee (1 \oplus y)y) \oplus (\bar{y}z \vee (0 \oplus y)y) \\ &= (y \vee \bar{y}z) \oplus (\bar{y}z \vee y) \\ &= 0 \\ f(x, 0, z) \oplus f(x, 1, z) &= (x \vee (x \oplus 1)) \oplus z \\ &= 1 \oplus z = \bar{z} \end{aligned}$$

これは定数にならないので線形関数ではない.

証明の意図が見られれば部分点 5 点。

(2) $f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ とおく,

$$\begin{aligned} f(0, y, z) \oplus f(1, y, z) &= (y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z}) \oplus (y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z) \\ &= (y \oplus z) \oplus (\overline{y \oplus z}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

また, 対称性より $f(x, 0, z) \oplus f(x, 1, z) = f(x, y, 0) \oplus f(x, y, 1) = 1$

以上より, これは線形関数である.

証明の意図が見られれば部分点 5 点。

(3) $f(x, y, z) = wxyz \vee \bar{w}\bar{x}yz \vee \bar{w}x\bar{y}z \vee \bar{w}xy\bar{z} \vee w\bar{x}\bar{y}z \vee w\bar{x}y\bar{z} \vee wx\bar{y}\bar{z} \vee \bar{w}x\bar{y}\bar{z}$ とおく, $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$ であるので,

$$\begin{aligned} f(0, x, y, z) &= xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \\ &= x(yz \vee \bar{y}\bar{z}) \vee \bar{x}(y\bar{z} \vee \bar{y}z) \\ &= x(yz \oplus \bar{y}\bar{z}) \oplus \bar{x}(y\bar{z} \oplus \bar{y}z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1, x, y, z) &= \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\ &= x(y\bar{z} \vee \bar{y}z) \vee \bar{x}(yz \vee \bar{y}\bar{z}) \\ &= x(y\bar{z} \oplus \bar{y}z) \oplus \bar{x}(yz \oplus \bar{y}\bar{z}) \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} f(0, x, y, z) \oplus f(1, x, y, z) &= x(yz \oplus \bar{y}\bar{z}) \oplus \bar{x}(y\bar{z} \oplus \bar{y}z) \oplus x(y\bar{z} \oplus \bar{y}z) \oplus \bar{x}(yz \oplus \bar{y}\bar{z}) \\ &= (x \oplus \bar{x})(yz \oplus \bar{y}\bar{z}) \oplus (x \oplus \bar{x})(y\bar{z} \oplus \bar{y}z) \\ &= yz \oplus \bar{y}\bar{z} \oplus y\bar{z} \oplus \bar{y}z \\ &= y(z \oplus \bar{z}) \oplus \bar{y}(z \oplus \bar{z}) \\ &= y \oplus \bar{y} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり, これは定数である.

また, 式の対称性より,

$$\begin{aligned} f(0, x, y, z) \oplus f(1, x, y, z) &= f(w, 0, y, z) \oplus f(w, 1, y, z) \\ &= f(w, x, 0, z) \oplus f(w, 1, y, z) \\ &= f(w, x, y, 0) \oplus f(w, 1, y, z) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であることがわかる.

以上より, 与関数は線形関数であるための十分条件を満たすので, 線形関数であるといえる.

証明の意図が見られれば部分点 5 点。