

2015年前期 無線通信システム

第9回 誤り訂正符号

阪口 啓 sakaguchi@mobile.ee.

2015年6月17日

講義スケジュール(後半)

	日付	教科書	内容
第9回	6月17日	4.6	誤り訂正符号
第10回	6月24日		適応符号化変調
第11回	7月 1日	4.3	符号間干渉と適応等化器
第12回	7月 8日		MATLAB演習
第13回	7月15日	3.6、4.5	スペクトル拡散と符号分割多重(CDMA)
第14回	7月22日	3.7	直交周波数分割多重(OFDM)

復習

■ フェージング伝搬路における誤り率特性

$$P_{\text{eb}}(\gamma) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_{\text{eb}}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}}} \right)$$

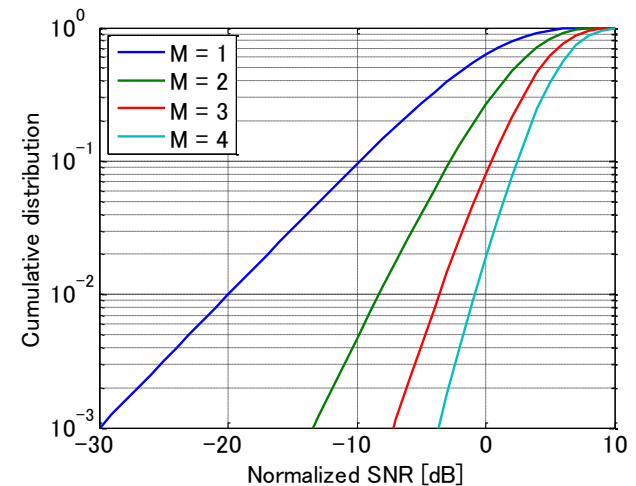
■ 空間ダイバーシチ(アレー信号処理)

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{w}^H \mathbf{y} = \mathbf{w}^H \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{w}^H \mathbf{n}$$

■ 最大比合成ダイバーシチ(MRC)の特性

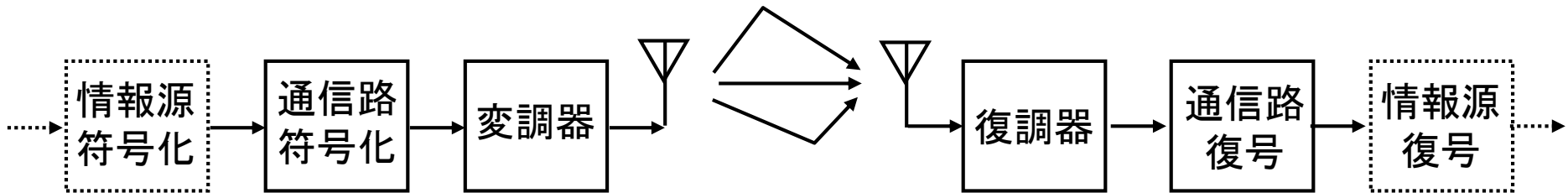
$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{|\mathbf{h}|^2 P}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^M |h_i|^2 P}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^M \gamma_i \quad \Rightarrow \quad f(\gamma) = \frac{1}{(M-1)! \bar{\gamma}^M} \gamma^{M-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)$$



講義内容

- 通信路符号器の構成
- 線形誤り訂正符号
- 畳込み符号
- 硬判定ビット復号
- 軟判定ビット復号
- パンクチュアとイレーサ
- フェージングとインターリーバ

符号化の種類



情報源符号化

メッセージの冗長性を取り除き情報を圧縮するための符号
(e.g. zip, mpeg, etc.)

通信路符号化

メッセージに冗長性を与え通信による情報誤りを防ぐための符号

通信路符号器の構成



誤り検出符号

受信器において誤り検出するための符号
誤り検出後、再送制御を行う (ARQ)
(e.g. 偶奇パリティ, CRC)

パンクチュア

符号化率 (パリティの量) を
通信路の状態に合わせて
適応的に制御する方法

誤り訂正符号

符号語間距離を拡大することで
誤り訂正能力を持たせるための符号
(e.g. ブロック符号 (Hamming, Reed
Solomon), 畳込み符号 (CC, Turbo))

インターリーバ

フェージングの落ち込みによる
バースト誤りを防ぐための
ランダムイザ

線形誤り訂正符号

(n, k) 符号化

メッセージ $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_k]$

符号語 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$

符号化率 $r = k/n$

線形符号

$$\mathbf{x}_i \oplus \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k$$

ハミング距離(符号語間距離)

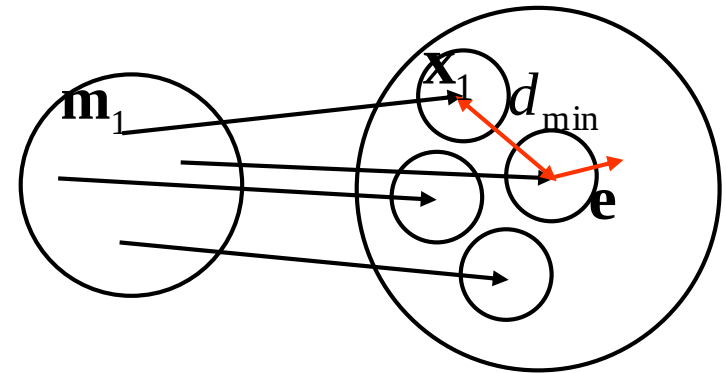
$$\begin{aligned} \text{ham}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= \text{hamw}(\mathbf{x}_i \oplus \mathbf{x}_j) \\ &= \text{hamw}(\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

誤り訂正能力

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min_{i,j} \text{ham}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \min_i \text{hamw}(\mathbf{x}_i) \\ d_c &= \left\lfloor \frac{1}{2}(d_{\min} - 1) \right\rfloor \end{aligned}$$

メッセージ $\mathbf{m}$

符号語 $\mathbf{x}$



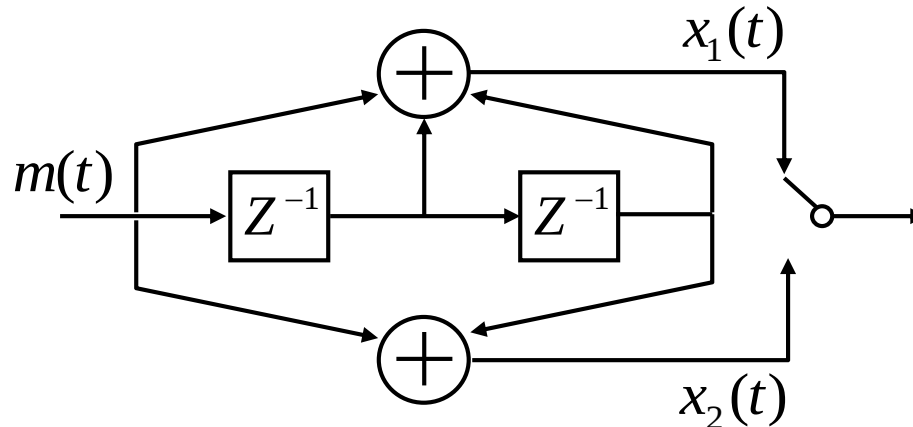
(3, 1) 繰返し符号の例

メッセージ	符号語	
0	0 0 0	$r = 1/3$
1	1 1 1	

最小距離 $d_{\min} = 3$

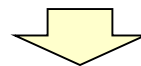
訂正能力 $d_c = \left\lfloor \frac{1}{2}(3-1) \right\rfloor = 1$

畳込み符号



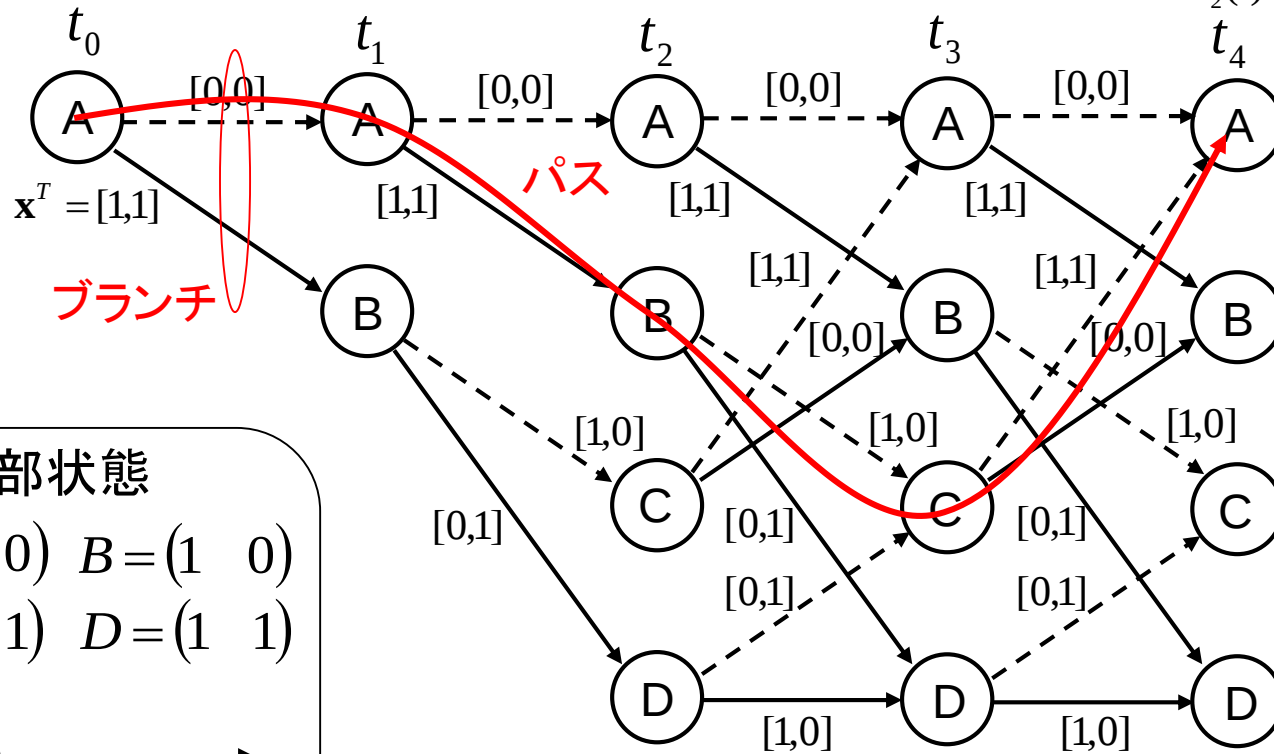
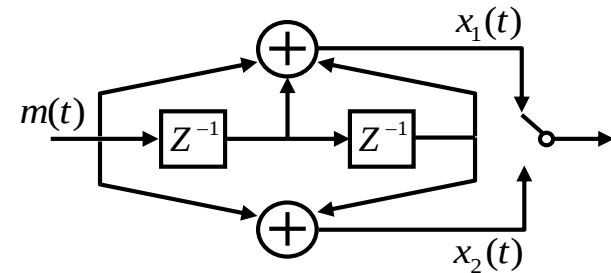
符号化率 $r = \frac{1}{2}$ 拘束長 $N = 3$ 生成多項式 $g_1 = 7, g_2 = 5$

入力	出力
0 0 0 0	00 00 00 00
0 1 0 0	00 11 10 11



符号語間距離を拡大することで誤り耐性を持たせる

トレリス線図



内部状態

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

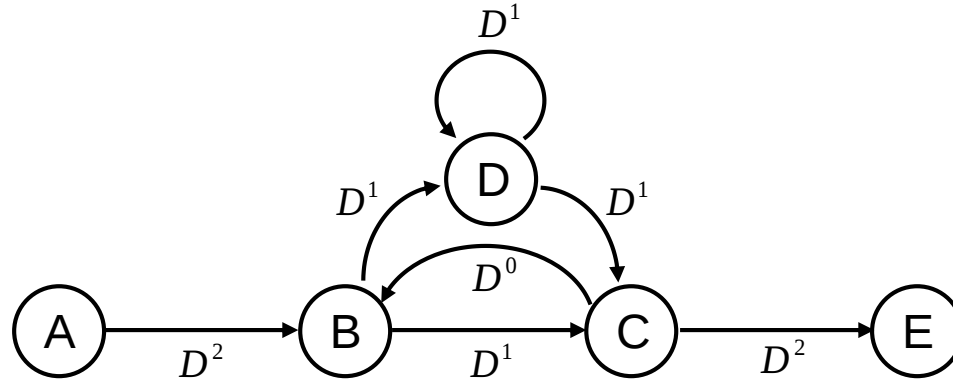
入力 0 ----->

入力 1 ----->

入力	出力
0 1 0 0	00 11 10 11

状態遷移と伝達関数

状態遷移図



伝達関数

$$X_B = D^2 X_A + X_C$$

$$X_C = DX_B + DX_D$$

$$X_D = DX_B + DX_D$$

$$X_E = D^2 X_C$$

$$T(D) = \frac{X_E}{X_A} = \frac{D^5}{1-2D}$$

$$= D^5 + 2D^6 + 4D^7 + \dots + 2^{d-d_{\min}} D^d$$

最小自由距離 $d_{\min} = 5$

↓

誤り訂正能力 $d_c = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$

硬判定ビットビ復号

受信信号

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t), r_2(t)]^T$$

ブランチメトリック

$$b_{AA}(t) = \text{ham}(\mathbf{r}(t), \mathbf{x}_{AA})$$

$$b_{AC}(t) = \text{ham}(\mathbf{r}(t), \mathbf{x}_{AC})$$

$$\text{ham}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i a_i \oplus b_i$$

パスメトリック

$$p_{AA}(t) = p_A(t-1) + b_{AA}(t)$$

$$p_{AC}(t) = p_C(t-1) + b_{AC}(t)$$

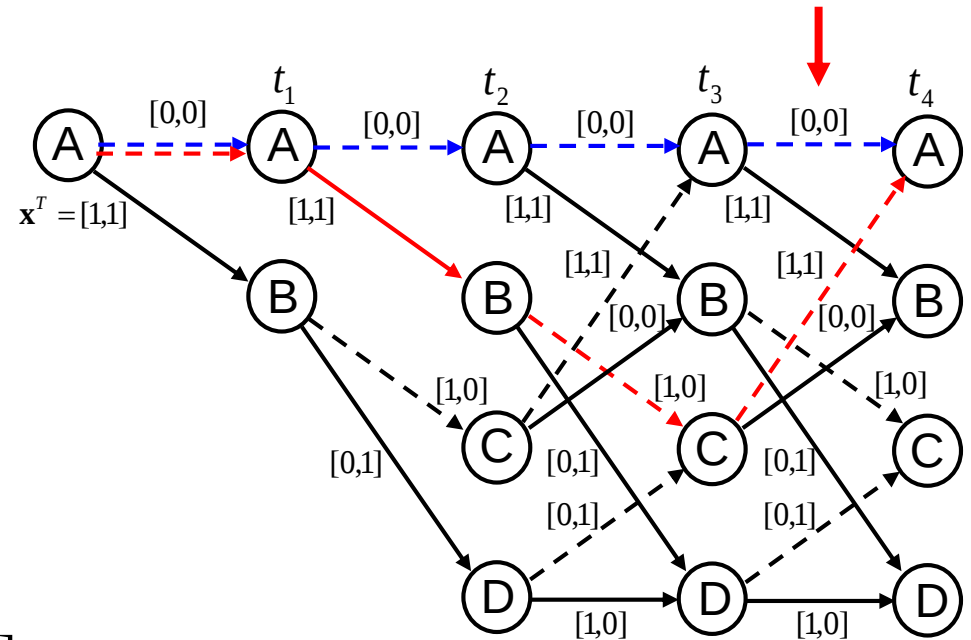
生き残りパス

$$p_A(t) = \min[p_{AA}(t), p_{AC}(t)]$$

パスメトリック最小

$$\hat{m}(t) = \arg \min[p_A(t), p_B(t), p_C(t), p_D(t)]$$

復号系列



硬判定ビット復号の例（後向き）

メッセージ

$$\mathbf{m} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \boxed{0 \quad 0}]$$

テールビット

符号語

$$\mathbf{x} = [00 \quad 11 \quad 10 \quad 11 \quad 00 \quad 00]$$

受信信号

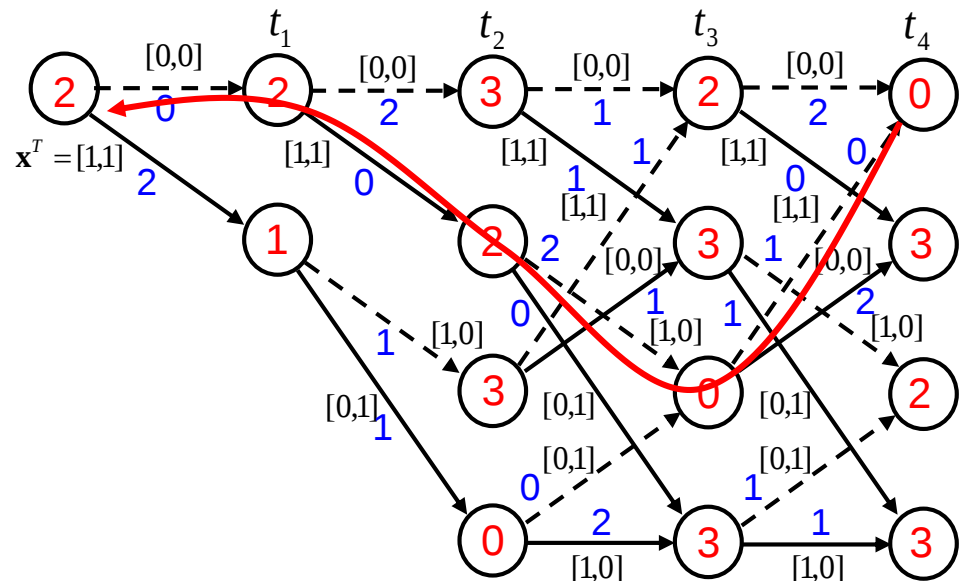
$$\mathbf{r} = [00 \quad 11 \quad \textcircled{01} \quad 11 \quad 00 \quad 00]$$

判定誤り

復号結果

$$\hat{\mathbf{m}} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

硬判定ビット復号



ビタビ復号の計算量

畳込み符号

$$(n, k) = (8, 4)$$

$$N = 3$$

全探索系列推定の計算量

$$L = 2^n = 256$$

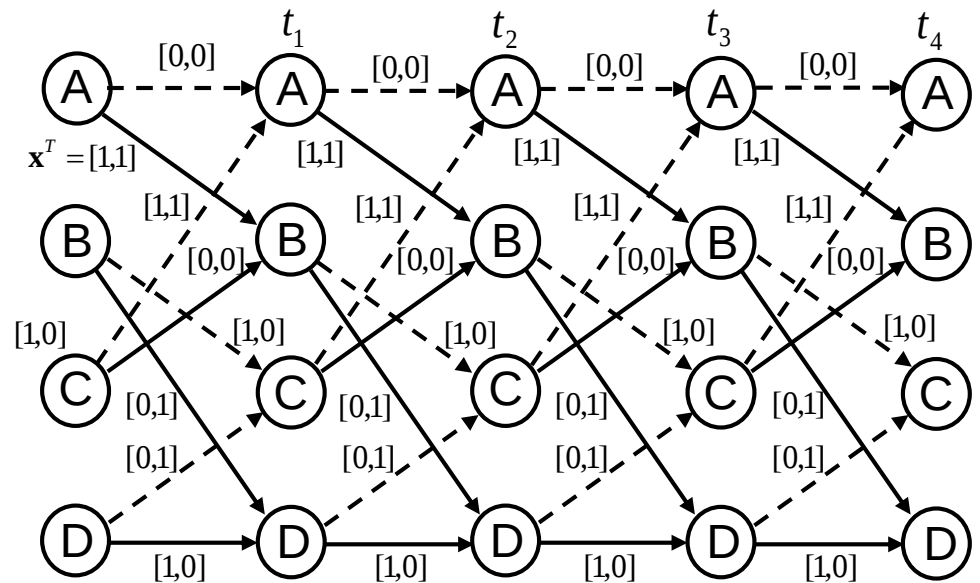
トレリス線図を用いた系列推定

$$L = 2^{N-1} \times 2^k = 64$$

ビタビ復号の計算量

$$L = 2^{N-1} \times 2 \times k = 32$$

トレリス線図



誤り率特性(硬判定)

符号語距離

$$d = \text{ham}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

$$\mathbf{x}_1 = [00 \quad 00 \quad 00 \quad 00]$$

$$\mathbf{x}_2 = [00 \quad 11 \quad 10 \quad 11]$$

ペアワイズ誤り率

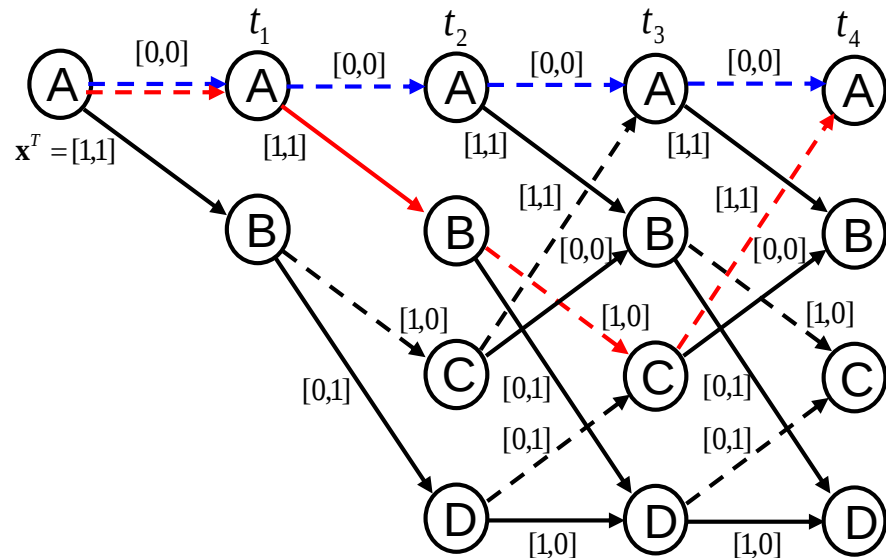
$$P_2(d) = \sum_{k=d_c+1}^d \binom{d}{k} P_e^k (1 - P_e)^{d-k}$$

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad \text{if BPSK}$$

$$d_c = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

符号誤り率

$$P_e < \sum_{d=d_{\min}}^{\infty} 2^{d-d_{\min}} P_2(d)$$



軟判定ビットビ復号

硬判定前受信信号

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = [\tilde{r}_1(t), \tilde{r}_2(t)]^T$$

ブランチメトリック

$$b_{AA}(t) = \text{euc}(\tilde{\mathbf{r}}(t), \tilde{\mathbf{x}}_{AA})$$

$$b_{AC}(t) = \text{euc}(\tilde{\mathbf{r}}(t), \tilde{\mathbf{x}}_{AC})$$

$$\tilde{b}_{AA}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{AA}$$

$$\tilde{b}_{AC}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{AC}$$

パスメトリック

$$p_{AA}(t) = p_A(t-1) + \tilde{b}_{AA}(t)$$

$$p_{AC}(t) = p_C(t-1) + \tilde{b}_{AC}(t)$$

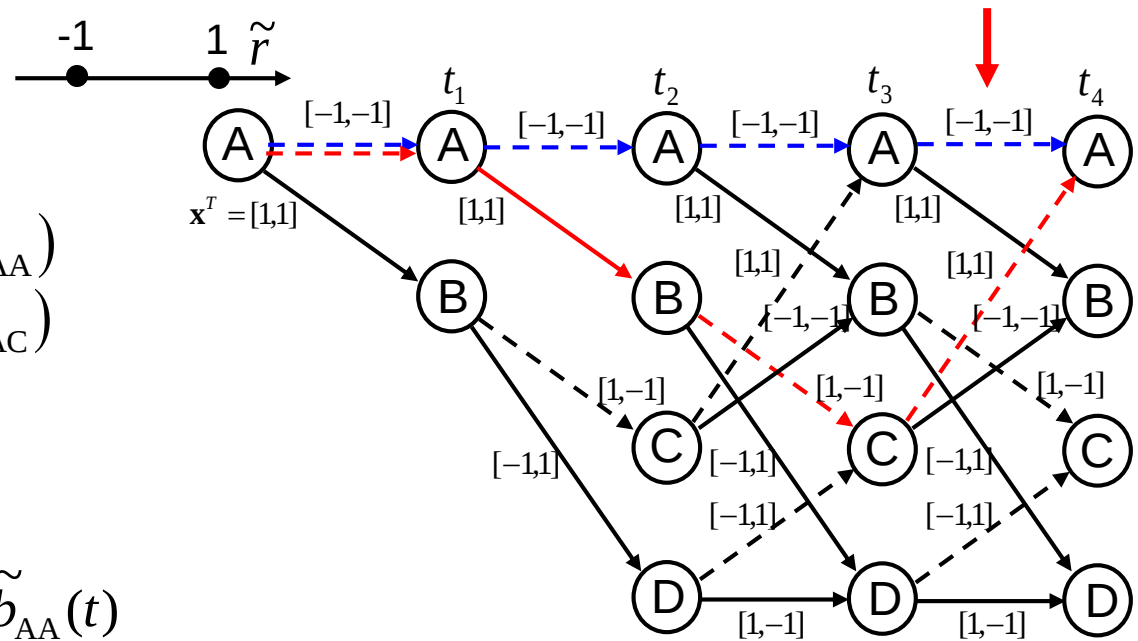
生き残りパス

$$p_A(t) = \max[p_{AA}(t), p_{AC}(t)]$$

パスメトリック最大

$$\hat{m}(t) = \arg \max[p_A(t), p_B(t), p_C(t), p_D(t)]$$

復号系列



軟判定基準

$$\begin{aligned} \text{euc}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \sum_i \sqrt{|a_i - b_i|^2} \\ &= \sum_i \sqrt{a_i^2 - 2a_i b_i + b_i^2} \end{aligned}$$

$$\min[\text{euc}(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \equiv \max[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$$

軟判定ビタビ復号の例（後向き）

メッセージ

$$\mathbf{m} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \boxed{0 \quad 0}]$$

テールビット

符号語

$$\mathbf{x} = [-1-1 \quad 11 \quad 1-1 \quad 11 \quad -1-1 \quad -1-1]$$

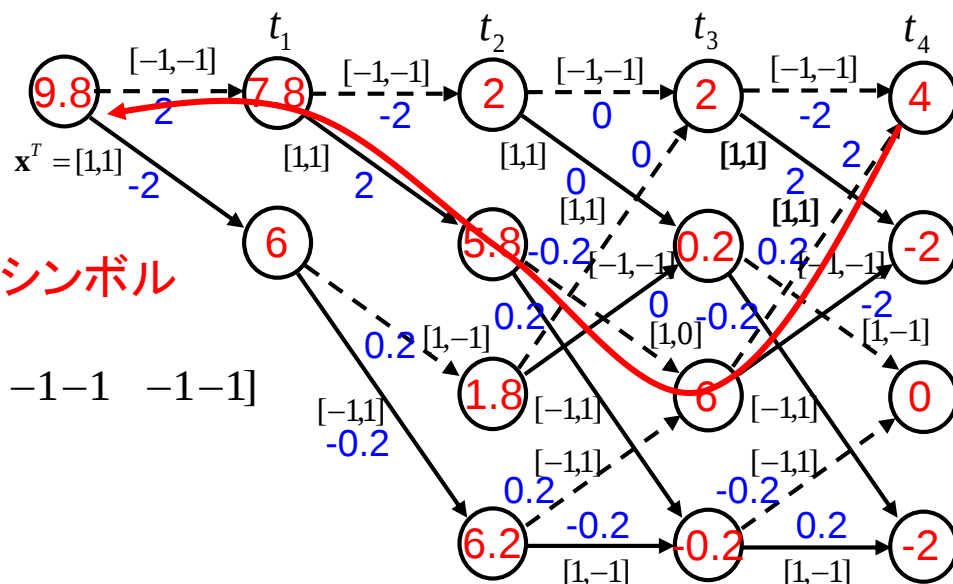
受信信号

$$\mathbf{r} = [-1.1-0.9 \quad 1.10.9 \quad \textcircled{-0.10.1} \quad 1.10.9 \quad -1-1 \quad -1-1]$$

復号結果

$$\hat{\mathbf{m}} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

軟判定ビタビ復号



誤り率特性(軟判定)

符号語距離

$$d = \text{ham}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

ペアワイズ誤り率

$$P_2(d) = P(p_2 > p_1)$$

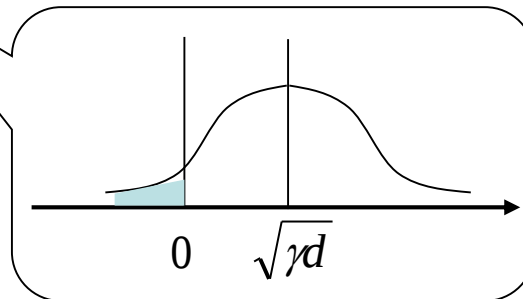
$$= P\left(\sum_i \tilde{\mathbf{r}}(t_i) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_2(t_i) - \tilde{\mathbf{x}}_1(t_i)) > 0\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=t_{\text{diff}}} 2\tilde{\mathbf{r}}(t_i) > 0\right)$$

$$P_2(d) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma d}) \quad \text{if BPSK}$$

符号誤り率

$$P_e < \sum_{d=d_{\min}}^{\infty} 2^{d-d_{\min}} P_2(d)$$

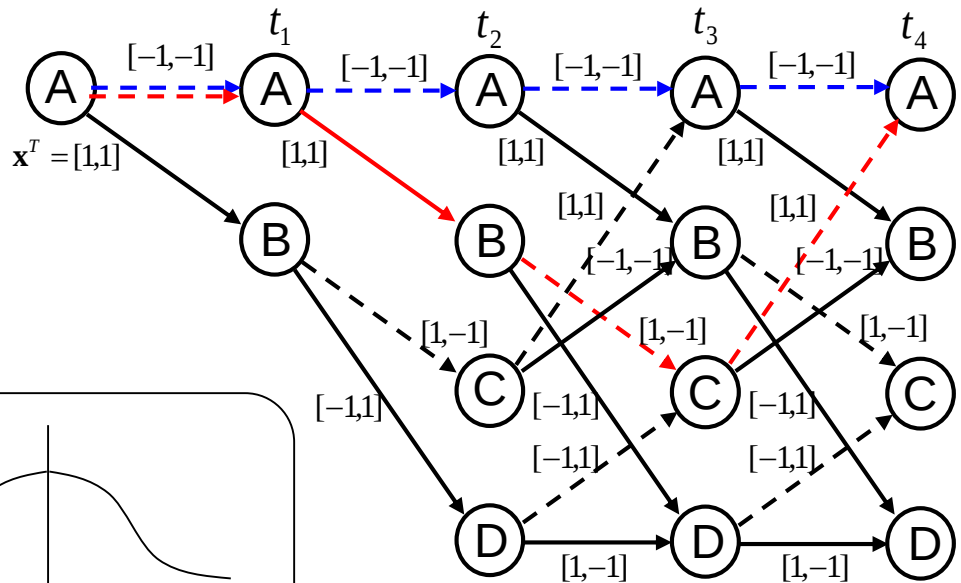


$$\mathbf{x}_1 = [00 \ 00 \ 00 \ 00]$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = [-1-1 \ -1-1 \ -1-1 \ -1-1]$$

$$\mathbf{x}_2 = [00 \ 11 \ 10 \ 11]$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = [-1-1 \ 11 \ 1-1 \ 11]$$



パンクチュア

入力

$m(1), m(2)$

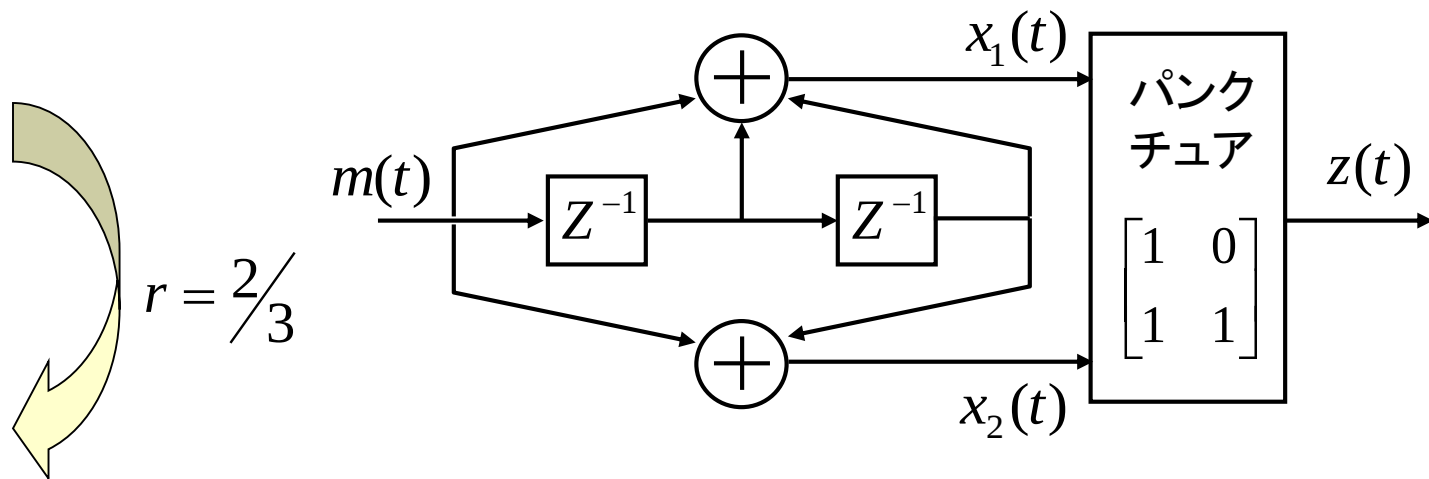
畳込み出力

$x_1(1), x_1(2)$

$x_2(1), x_2(2)$

パンクチュア

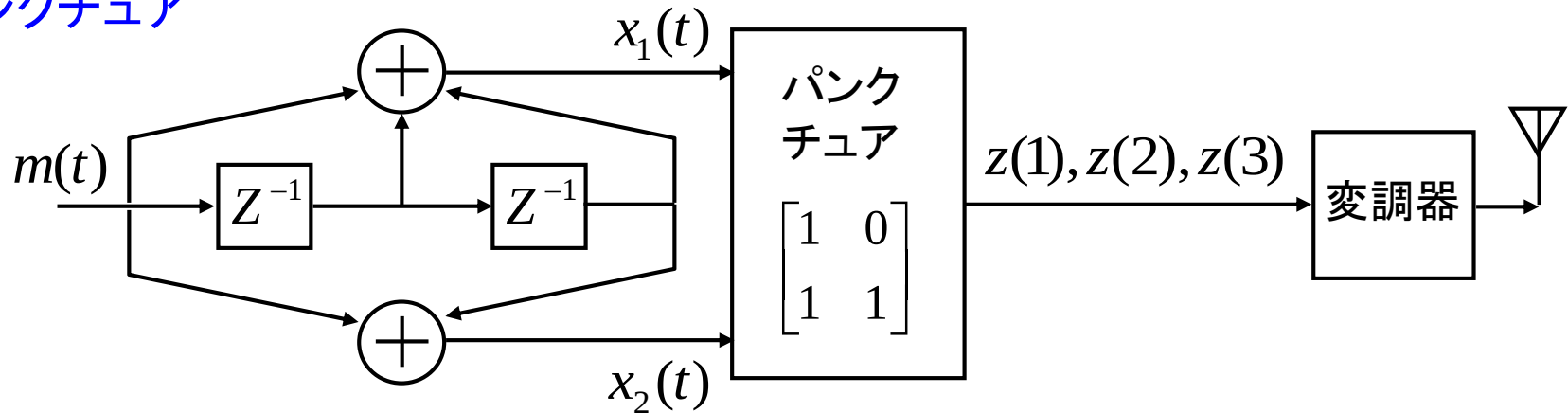
$z(1), z(2), z(3) = x_1(1), x_2(1), x_2(2)$



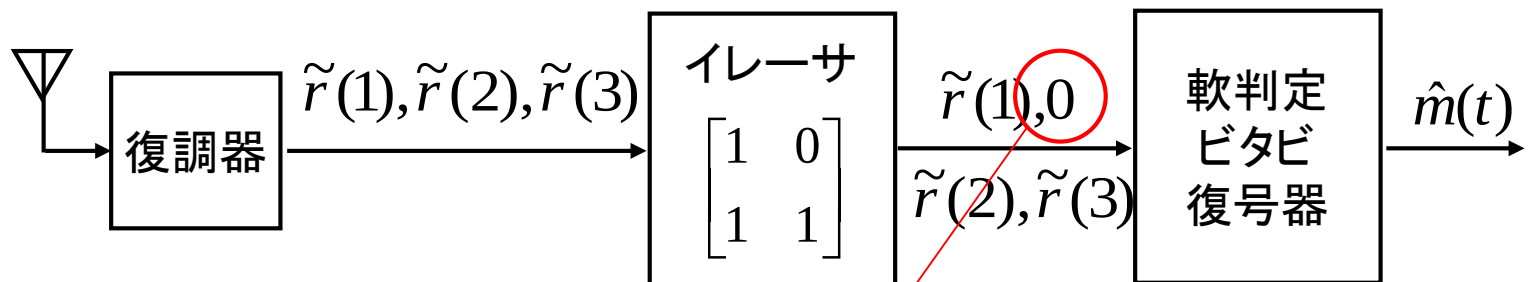
N	$r = \frac{1}{2}$		$r = \frac{2}{3}$		$r = \frac{3}{4}$		$r = \frac{4}{5}$	
	P	$d_{\min}$	P	$d_{\min}$	P	$d_{\min}$	P	$d_{\min}$
3	1 1	5	1 0 1 1	3	1 0 1 1 1 0	3	1 0 1 1 1 1 0 0	2

イレーサ

パンクチュア



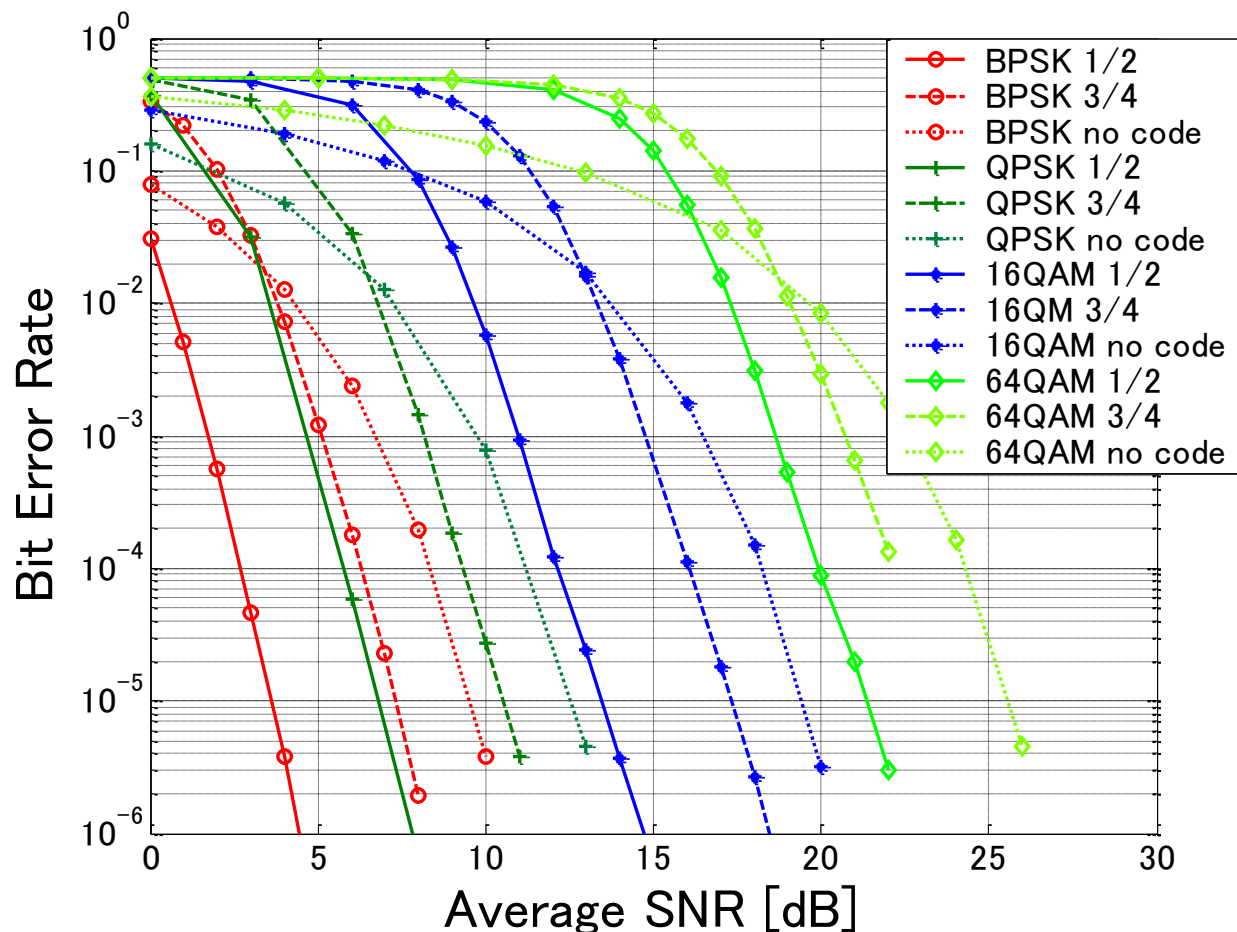
イレーサ



符号間距離に影響を与えない中性シンボルを挿入

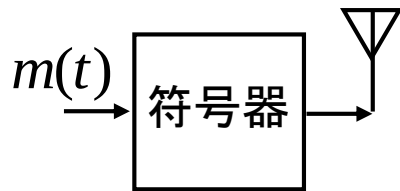
ビット誤り率特性

AWGN (Additive White Gaussian Noise) チャネル

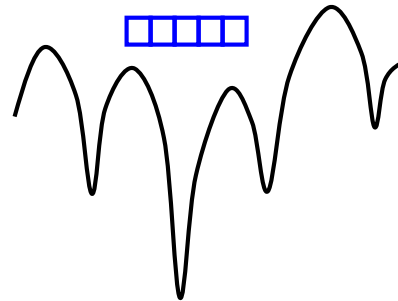


インターリーバ

インターリーバなし



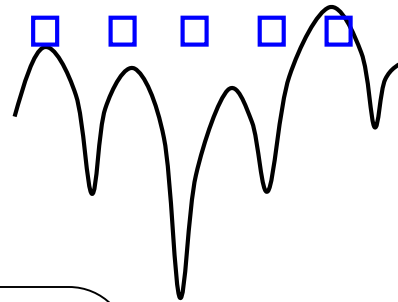
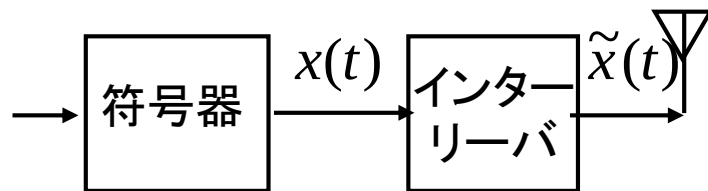
フェージング伝搬路



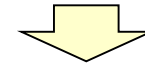
軟判定復号
ペアワイズ誤り率

$$P_2(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_{\text{bad}} d})$$

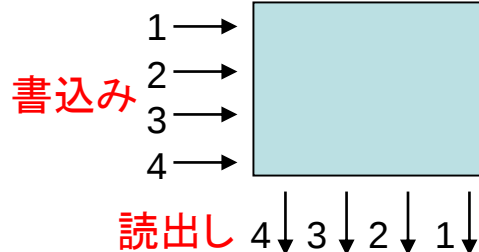
インターリーバあり



$$P_2(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d \gamma_i}\right)$$



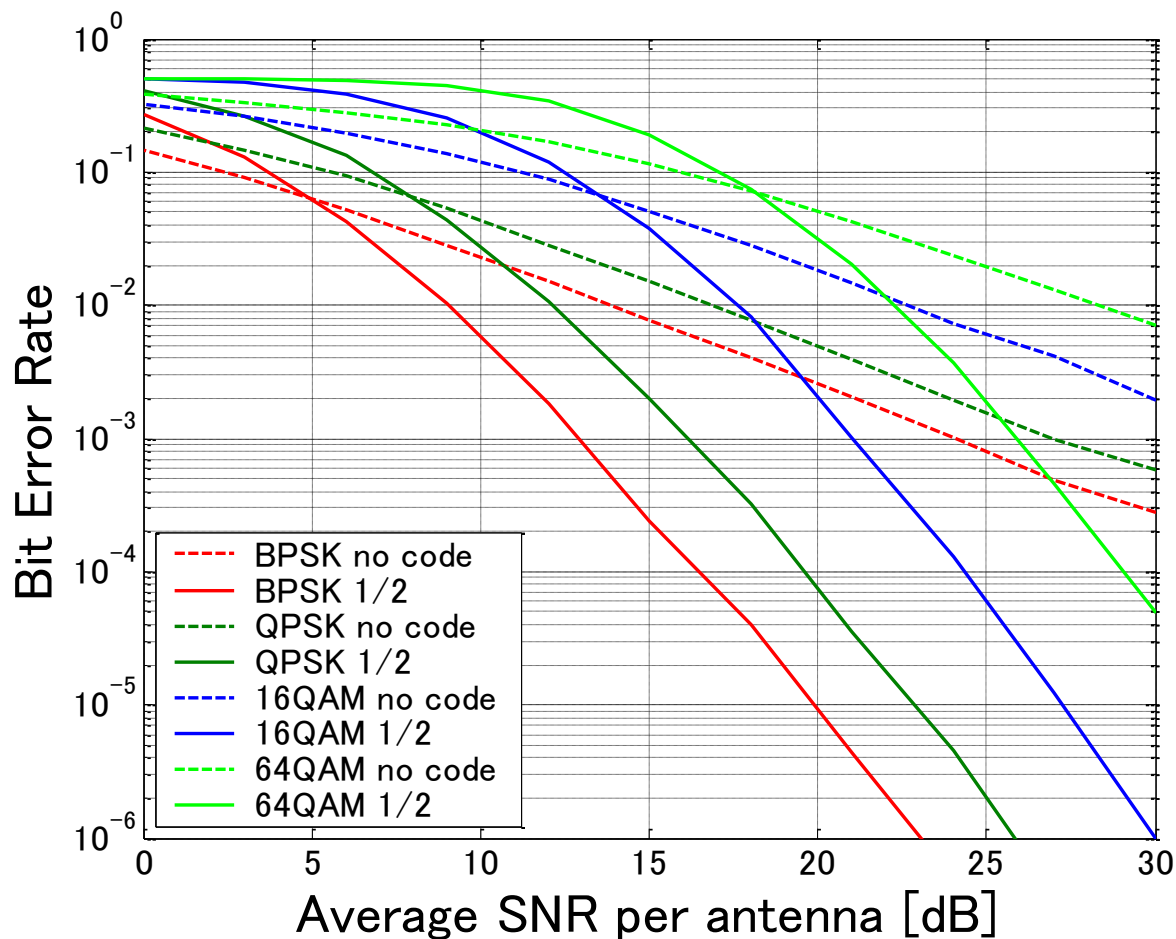
メモリ型インターリーバ



時間ダイバーシティによる
バースト誤りの回避

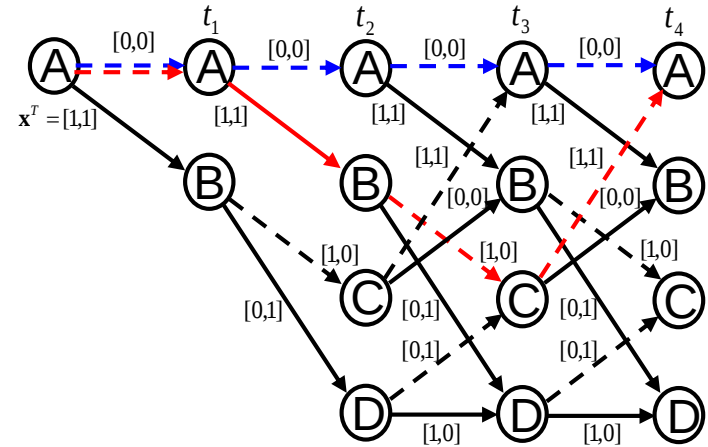
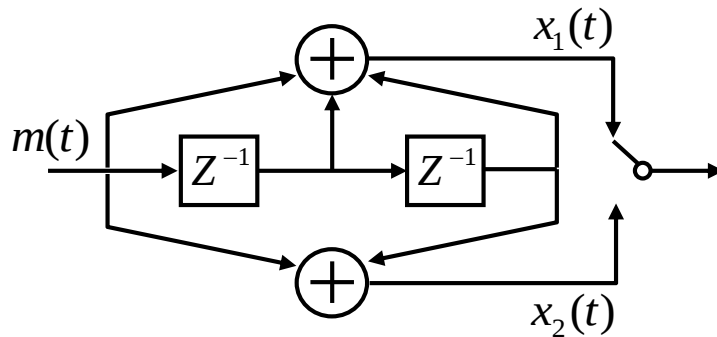
フェージング環境における誤り率特性

レイリーフェージングチャネル



まとめ

■ 畳込み符号とビタビ復号



■ 復号後誤り率特性

$$P_e < \sum_{d=d_{\min}}^{\infty} 2^{d-d_{\min}} P_2(d)$$

$$\text{硬判定: } P_2(d) = \sum_{k=d_c+1}^d \binom{d}{k} P_e^k (1-P_e)^{d-k}$$

$$\text{軟判定: } P_2(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma d})$$

■ インターリーバと時間ダイバーシチ

時間ダイバーシチによるバースト誤りの回避 $P_2(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d \gamma_i}\right)$