

1 次の微分方程式を解け。

1.1 変数分離型

$$(1) \quad (1+x)\frac{dy}{dx} + (1+y) = 0$$

$$(2) \quad x^2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(3) \quad xy - \frac{dy}{dx} = x^2\frac{dy}{dx}$$

$$(4) \quad x(2y+3)\frac{dy}{dx} + y(y+3) = 0$$

$$(5) \quad (a^2 + y^2)dx = 2x\sqrt{ax - a^2}dy$$

$$(6) \quad x\sqrt{y^2 - 1}dx + y\sqrt{x^2 - 1}dy = 0$$

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} \cos^2 x + \sin x \cos^2 y = 0$$

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = \tan y \tan x$$

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = (y^2 - 1) \tan x$$

$$(10) \quad (1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$(11) \quad x(y-2)\frac{dy}{dx} = 2y$$

1.2 同次型

(8) は、いわゆる同次型ではないですが、 ...。

$$(1) \quad (2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2)dx - 5xydy = 0$$

$$(3) \quad (2x^2y + 3y^3)dx - (x^3 + 2xy^2)dy = 0$$

$$(4) \quad x \tan \frac{y}{x} - y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(5) \quad x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x - y - 3}$$

$$(7) \quad 3x + y - 2 + (x + y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + y - 2}$$

1.3 線形 (1)-(9), Bernoulli 型 (10)-(12)

線形のものは、左辺に積分因子型を応用しやすいものは、その方が見通しよく、速く解答できるはず。積分因子が難しい形になりそうな場合は、同次の一般解 + 非同次の特殊解 (定数変化法) が紛れが少ない。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + y = x$$

$$(2) \quad x \frac{dy}{dx} + y = x^2$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1 - x^2$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} - y = \sin x$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} + y \cos x = \cos x \sin x$$

$$(7) \quad x \frac{dy}{dx} + y = x \ln x$$

$$(8) \quad (1 + x^2) \frac{dy}{dx} + xy = x$$

$$(9) \quad (1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 1$$

$$(10) \quad x^2 \frac{dy}{dx} = xy + y^2$$

$$(11) \quad 2x \frac{dy}{dx} + y + (x - 1)y^2 = 0$$

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = xy + x^3 y^3$$

1.4 完全微分型または積分因子型

- (1) $(y+x)dx + xdy = 0$
- (2) $(6x-2y+1)dx + (2y-2x-3)dy = 0$
- (3) $x(x+2y)dx + (x^2-y^2)dy = 0$
- (4) $2xydx + (y^2-x^2)dy = 0$
- (5) $y(2x+y)dx + x(2x+3y)dy = 0$
- (6) $(y^2-xy)dx - x^2dy = 0$
- (7) $(2xy-\cos x)dx + (x^2-1)dy = 0$
- (8) $(\tan y-3x^2)dx + x\sec^2 ydy = 0$
- (9) $(\tan y-x)dx + \sec^2 ydy = 0$
- (10) $(x^2+\ln y)dx + \frac{x}{y}dy = 0$

1.5 特殊な形の微分方程式

以下、 $p = y'$ とする。

- (1) $y = px - p^2$
- (2) $y = px - p + 2p^2$
- (3) $y = xp + \frac{a}{p}$
- (4) $y = 2xp + p^2$
- (5) $y = -\frac{x}{p} + p$
- (6) $yp = x + p^3$
- (7) $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$
- (8) $p^3 + axp + x^3 = 0$
- (9) $(a^2 - x^2)p^3 + bx(a^2 - x^2)p^2 - p - bx = 0$
- (10) $p^2 + 2py \cot x - y^2 = 0$

1.6 階数を下げられる場合

- (1) $y'' + (x - 1)(y')^3 = 0$
- (2) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$
- (3) $(1 + x^2)y'' + 1 + (y')^2 = 0$
- (4) $(xy''' - y'')^2 = (y''')^2 + 1$
- (5) $y'''' - 2y''' = e^x$
- (6) $2y'' = e^y$ (この問題は面倒くさく難しい ; 省略して良い)
- (7) $yy'' + (y')^2 = 1$
- (8) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$
- (9) $y'''(y')^3 = 1$
- (10) $y(y - 1)y'' + (y')^2 = 0$
- (11) $2y'y''' = 3(y'')^2$
- (12) $5(y''')^2 = 3y''y''''$

2 以下の問題に答えよ

2.1 放射性物質の壊変

放射性物質は一定の確率で崩壊を起こすことが知られている．したがって，単位時間に崩壊してゆく原子の数は，その瞬間の原子の数に比例する．

1. 時刻 t における原子の数を $N(t)$ とする．崩壊する割合（比例定数）を $\lambda(> 0)$ とし， $N(t)$ に対する微分方程式を作れ．
2. この微分方程式の解として， $N(0) = N_0$ をみたすものを求めよ．
3. 崩壊定数 λ と半減期 T との関係を求めよ． $\log 2 = 0.6931$ とする．
4. $t = 1$ のとき， $N(t)$ が N_0 の 99% となっていた．この物質の半減期を求めよ． $\log 100 = 4.605, \log 99 = 4.595$ とする．

2.2 化学反応速度論

A, B なる 2 種類の物質がある。A の 1 分子が B の 1 分子と結合して第 3 の物質 C の 1 分子を作る。その割合は、A および B の量のその瞬間の積に比例するとし、はじめ ($t = 0$) に A は a グラムモル、B は b グラムモルあり、C は 0 グラムであったとする。 $b > a$ として、時刻 t における C の量を求めよ。 $t \rightarrow \infty$ ではどのようなになるか？

2.3 放熱現象

沸かし終えた風呂の温度の時間変化率は、そのときの室温との差に比例する。すなわち、室温が $10 [^{\circ}\text{C}]$ のとき、時刻 t における風呂の温度 $T(t)[^{\circ}\text{C}]$ は、

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 10) \quad (k > 0; \text{定数}) \quad (1)$$

となる。いま、 $t = 0$ で $60 [^{\circ}\text{C}]$ だった風呂が、10 分後に $55 [^{\circ}\text{C}]$ になった。 $40 [^{\circ}\text{C}]$ になるのは何分後か。 $\log 2 = 0.6931, \log 3 = 1.099, \log 5 = 1.609, \log 10 = 2.303$ とする。

2.4 平面曲線

接線の接点 M から、軸 OX との交点 T までの部分 $\overline{MT}$ の長さが、軸 OX の一部 $\overline{OT}$ に等しいような曲線を求めよ。

2.5 同次型の極座標表示

同次型の微分方程式は、極座標 (r, θ) で書き換えると変数分離型になることを示せ。

2.6 交流回路

交流発電機の瞬間電圧を E とすれば、

$$E = E_0 \sin \omega t \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 $\omega = 2\pi f$ とする。交流電圧 E のある回路に、電流 i が流れ、抵抗 R 、インダクタンス L があるとき、電流 i が満たすべき微分方程式を示し、その解を求めよ。

ただし、必要ならば、以下の公式

$$\int e^{(R/L)t} \sin \omega t dt = \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} e^{(R/L)t} \sin(\omega t - \phi), \quad \text{ただし} \quad \tan \phi = \frac{L\omega}{R} \quad (3)$$

を用いよ。

2.7 平面曲線 2、Clairaut 型

座標軸と接線で囲まれる三角形の面積が一定となる曲線を求めよ。

2.8 同次型の一般的展開

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \quad (4)$$

の解法を、できるだけ一般的に（場合分けをして）考察せよ。ただし、 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ は定数とする。

2.9 ロケット燃料の所要量

1. ロケットが、燃料を噴射しながら一定の推進力を得て加速している状況を考える。ロケットの速度が v のとき、ロケットの質量を $m(v)$ とする。質量 Δm の燃料を速度 u で放出しながらロケット本体の速度を v から Δv だけ加速させたとなると、どのような微分方程式が成り立つか。（運動量保存則を用いる）
2. $v = 0$ のときのロケットの質量を M_0 とする。

$$\frac{dm}{dv} = -\frac{m}{V} \quad (V : \text{定数}) \quad (5)$$

を解いてロケットの運動を論ぜよ。

3 次の微分方程式を解け

3.1 2 階線形常微分方程式

- (1) $y'' - 6y' + 8y = 0$
- (2) $y'' - 10y' + 25y = 0$
- (3) $y'' + 8y' + 25y = 0$
- (4) $y'' - y' - 6y = -6x - 1$
- (5) $y'' - 2y' + y = x$
- (6) $y'' - 2y' + 2y = 6x - 6$
- (7) $y'' - 2y' + y = x^4 + 2x^3 - 1$
- (8) $y'' - 6y' + 9y = e^{4x}$
- (9) $y'' - 2y' - 8y = e^{2x}$
- (10) $y'' + y' - 6y = e^{-3x}$
- (11) $y'' - 3y' + 2y = \cos x$
- (12) $y'' + y = \cos x - \cos 3x$
- (13) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$
- (14) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^{3x}$
- (15) $y'' + y = \sec x$

3.2 3 階以上の線形常微分方程式

- (1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
- (2) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$
- (3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x}$
- (4) $y'''' + y'' + y = 0$

4 発熱する物体の熱伝導問題

テキスト「例題 6」の、「無限板の熱伝導」の応用ケースとして、無限板が、場所によらず、単位体積・単位時間あたり Q の発熱を行っている場合を考察する。このとき、板内部の温度分布 $T(x)$ を表す熱伝導方程式は次式で与えられる。

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = 0 \quad (6)$$

ただし、 k は熱伝導率で定数とする。 Q も定数であるとする。対応する随伴同次方程式は、テキスト (3.49) 式で与えられ、随伴同次方程式の一般解は (3.52) で与えられている。

1. 非同次方程式の特殊解の導出

式 (5) の解を $T(x) = C_3 x^2$ と仮定して代入し (C_3 は定数)、 C_3 の値を求め、非同次方程式 (5) の特殊解の 1 つを求めよ。

2. 非同次方程式の一般解

以上から式 (5) の一般解を求めよ。

3. 境界条件を与えた場合の非同次方程式の特殊解

板の両端 $x = 0, h$ で温度が等しく T_1 、すなわち $T(0) = T(h) = T_1$ と与えられたとき、板の中の温度分布 $T(x)$ はどのようになるか、略図を示して説明せよ。

5 初期条件を満たす解を求める問題（初期値問題）

与えられた初期条件を満たす解を求めよ。（一般解ではなく、特殊解または特異解）

- (1) $y' = (y^2 + y)e^{-x^2}$, ただし $x = 0$ の時 $y = 0$
- (2) $y' + (\cos x) \cdot y = \sin x \cos x$, ただし $x = 0$ の時 $y = 0$
- (3) $(x^2 + \ln y)dx + \frac{x}{y}dy = 0$, ただし $x = 1$ の時 $y = 1$

6 2 階の線形常微分方程式の補足

一般解を求めよ。

- (1) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x-1$,
ヒント $y_1 = x$, $y_2 = e^x$ は対応する同次方程式の一次独立な解である。
- (2) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

7 連立常微分方程式

一般解を求めよ。

- (1) $\frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 3y$
- (2) $\frac{dx}{dt} = -5x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3y$
- (3) $\frac{dx}{dt} = -7x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 5y$
- (4) $\frac{dx}{dt} = -5x - y + e^t, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3y + e^{2t}$

8 解答

- 1.1 (1) $(1+x)(1+y) = C$
(2) $y = Ce^{\frac{1}{x}}$
(3) $y = C\sqrt{x^2 + 1}$
(4) $xy(y+3) = C$
(5) $\sqrt{ax - a^2} - y = C(a^2 + y\sqrt{ax - a^2})$
(6) $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = C$, または $y = 1$
(7) $\sec x + \tan y = C$
(8) $\sin y \cos x = C$
(9) $y + 1 = +C(y - 1) \cos^2 x$
(10) $y - x = C(1 + xy)$
(11) $x^2 y^2 = Ce^y$

- 1.2(1) $x^2 + xy + y^2 = C$
(2) $Cx^2 = (x^2 - 4y^2)^5$
(3) $y^2(x^2 + y^2) = Cx^6$
(4) $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = C$
(5) $x^2 - 2Cy = C^2$
(6) $\tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x-2}\right) = \ln \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} + C$
(7) $3x^2 + 2xy + y^2 = 4x + C$
(8) $y - x - \frac{1}{2} \ln |2x + 2y - 3| = C$

$$\begin{aligned}
1.3 \quad (1) \quad & y = Ce^{-x} + x - 1 \\
(2) \quad & y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x} \\
(3) \quad & xy = C + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \\
(4) \quad & y = Ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \\
(5) \quad & y = \sin x + C \cos x \\
(6) \quad & y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \\
(7) \quad & 4xy = C - x^2 + 2x^2 \ln |x| \\
(8) \quad & y = 1 + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \\
(9) \quad & y = x + C\sqrt{|1-x^2|} \\
(10) \quad & y = \frac{x}{C - \ln |x|}, \text{ または } y = 0 \\
(11) \quad & 1/y = x + C\sqrt{x} + 1 \\
(12) \quad & y^2(x^2 - 1 + Ce^{-x^2}) + 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.4 \quad (1) \quad & x^2 + 2xy = C \\
(2) \quad & 3x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y = C \\
(3) \quad & x^3 + 3x^2y - y^3 = C \\
(4) \quad & x^2 + y^2 = Cy \\
(5) \quad & x^2y^2 + xy^3 = C \\
(6) \quad & -y + 2x = 2Cx^2y \\
(7) \quad & x^2y - \sin x - y = C \\
(8) \quad & x \tan y - x^3 = C \\
(9) \quad & \tan y = Ce^{-x} + x - 1 \\
(10) \quad & \frac{1}{3}x^3 + x \ln |y| = C
\end{aligned}$$

- 1.5 (1) $y = Cx - C^2, y = \frac{1}{4}x^2$
- (2) $y = Cx - C + 2C^2, y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$
- (3) $y = Cx + \frac{a}{C}, y = \pm 2\sqrt{ax}$
- (4) $x = -\frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}, y = \frac{2}{3}p^2 + \frac{2C}{p}, p \text{ はパラメータ}$
- (5) $x = \left[\ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) + C \right] \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}},$
 $y = -\left[\ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) + C \right] \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} + p, p \text{ はパラメータ}$
- (6) $x = 2p + \frac{Cp}{\sqrt{p^2 - 1}}, y = 2 + \frac{C}{\sqrt{p^2 - 1}} + p^2, p \text{ はパラメータ}$
- (7) $y = C(C - x)^2, y(4x^3 - 27y) = 0$
- (8) $x = -\frac{at}{1 + t^3}, y = \frac{a^2(1 + 4t^3)}{6(1 + t^3)^2} + C, p = tx, p \text{ はパラメータ}$
- (9) $(y + \frac{bx^2}{2} + C)[x - a \sin(y + C)] = 0$
- (10) $(y \sin x)^2 - 2Cy + C^2 = 0$

- 1.6 (1) $y = \ln \left| (x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + C_1} \right| + C_2$
- (2) $y = \ln |x^2 + C_1| + C_2$, または $y = C$
- (3) $y = -\frac{1}{C_1}x + \frac{1}{C_1}(C_1 + \frac{1}{C_1}) \ln \left| x + \frac{1}{C_1} \right| + C_2$, または $y = -\frac{1}{2}x^2 + C$
- (4) $y = \frac{C_1}{6}x^3 \pm \frac{\sqrt{C_1^2 + 1}}{2}x^2 + C_2x + C_3$, または
 $y = \pm \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} \right] + C_4x + C_5$
- (5) $y = C_1e^{2x} + C_2x^2 + C_3x + C_4 - e^x$
- (6) $2C_1^2e^{-y} = \cosh(C_1x + C_2) - 1$ または $2C_3^2e^{-y} = \cos(C_3x + C_4) + 1$,
 または $y = -2 \ln \left| \frac{x+C}{2} \right|$
- (7) $y^2 = x^2 + C_1x + C_2$
- (8) $x = y - C_1 \ln |y| + C_2$, または $y = C$
- (9) $y = \frac{1}{2} \left[(x - C_2) \sqrt{C_1 + (x - C_2)^2} + C_1 \ln \left| \frac{x - C_2}{\sqrt{C_1}} + \sqrt{\frac{(x - C_2)^2}{C_1} + 1} \right| \right] + C_3$
- (10) $y - \ln |y| = C_1x + C_2$, または $y = C$
- (11) $y = \frac{1}{C_1x + C_2} + C_3$
- (12) $y = C_1\sqrt{x + C_2} + C_3x + C_4$, または $y = C_5x^2 + C_6x + C_7$

- 3.1 (1) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{2x}$
- (2) $y = (C_1 + C_2x)e^{5x}$
- (3) $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
- (4) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} + x$
- (5) $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$
- (6) $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3x$
- (7) $y = e^x(C_1 + C_2x) + x^4 + 10x^3 + 48x^2 + 132x + 167$
- (8) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^{4x}$

$$\begin{aligned}
(9) \quad & y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{8} e^{2x} \\
(10) \quad & y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{5} x e^{-3x} \\
(11) \quad & y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - \frac{3}{10} \sin x + \frac{1}{10} \cos x \\
(12) \quad & y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{8} \cos 3x \\
(13) \quad & y = e^x \left[\left(C_1 - \frac{1}{2} x \right) \cos x + C_2 \sin x \right] \\
(14) \quad & y = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{8} e^{3x} (2x^2 - 4x + 5) \\
(15) \quad & y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + (\cos x) \ln |\cos x|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.2 \quad (1) \quad & y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} \\
(2) \quad & y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x \\
(3) \quad & y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^{2x} + e^{2x} \\
(4) \quad & y = e^{x/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^{-x/2} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.(1) \quad & y = 0 \\
(2) \quad & y = \sin x - 1 + e^{-\sin x} \\
(3) \quad & \frac{1}{3} x^3 + x \ln y = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.(1) \quad & y = C_1 x + C_2 e^x - (x^2 + x + 1) \\
(2) \quad & y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.(1) \quad & x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, \quad y = C_1 e^t + 4C_2 e^{-2t} \\
(2) \quad & x = (C_1 + C_2 t) e^{-4t}, \quad y = -(C_1 + C_2 + C_2 t) e^{-4t} \\
(3) \quad & x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad y = e^{-6t} [(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t] \\
(4) \quad & x = (C_1 + C_2 t) e^{-4t} + \frac{4}{25} e^t - \frac{1}{36} e^{2t}, \quad y = -(C_1 + C_2 + C_2 t) e^{-4t} + \frac{1}{25} e^t + \frac{7}{36} e^{2t}
\end{aligned}$$