工学数理解析第 1
常微分方程式
補足ノート

原子炉工学研究所　　赤塚　洋
hakatsuk@nr.titech.ac.jp

平成 27 年 4 月

1　単独常微分方程式

常微分方程式は、数学（あるいは理学）の立場であれば、それだけで十分に研究の対象となるものである。一般に、単独の常微分方程式問題は、

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

という方程式に対して、

$$y = y(x) \tag{2}$$

という解を見出す作業であると考えられがちであるが、数学的な立場からすると、それだけでは不十分である。すなわち、数学的に厳密な立場からすると、問題は

1. y を見つけること
2. その解が、ある条件のもとで一意か
3. その解は安定か否か

など、いくつもの面から捉えられねばならないからである。

しかし、工学の多くの分野では、解 (2) が求められれば、ほとんどの場合自動的にそれは一意であるし、存在すること自体も自明であることが多い。ここでは、機械系の学部の方々を対象としているので、工学数理としての立場から、主に解を見出す作業に的を絞り、数回の講義・演習を通じて微分方程式の学部 2 年レベルの勉強をすることとしよう。

2　1 階常微分方程式に対する求積法

まずは、微分方程式に対して、積分操作を施すことにより、解を得ることが出来る場合を考えることとする。そのような解法は、「求積法」と言われる。

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

以下、特別な形の F に対して $y = y(x)$ を具体的に求めることが課題となる。

2.1　変数分離型

M が x のみの関数、かつ N が y のみの関数とする。与えられた方程式 (3) が

$$M(x)\mathrm{d}x + N(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{4}$$

のような形に変形される場合、そのような 1 階常微分方程式を「変数分離型」という。式 (4) を解くことは容易で、そのまま積分操作を両辺に施せば良く、その結果

$$\int M(x)\mathrm{d}x + \int N(y)\mathrm{d}y = C \tag{5}$$

を得る。式 (5) において、C は任意定数である（以下、断りのない限り、C は任意定数とする）。式 (5) は、式 (4) の陰 (implicit) な解を与えている。

この形の詳細は、テキスト 3.2.1 節に譲る。

2.2　同次型

例えば、次のような微分方程式を考える。

$$y' = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy + 3y^2} \tag{6}$$

分子・分母が同じ次数の同次多項式で与えられているような場合である。このような場合の常套手段は、式 (6) で $x \neq 0$ を仮定して x^2 で分母分子を除することで、

$$y' = \frac{1 + 2(y/x) + (y/x)^2}{(y/x) + 3(y/x)^2} \tag{7}$$

と変形することである。

一般に、y' を x, y の関数として表した場合、(y/x) の関数となっているような微分方程式を「同次型」という。同次型の 1 階微分方程式

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8}$$

の解法を述べる。

同次型の基本は $(y/x) = v$ と置き換えることである。もちろん、

$$y = xv \tag{9}$$

である。もちろん、v は x のみの関数 $v(x)$ である。この時、式 (8) を変形してみる。

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f(v) \tag{10}$$

ここで、式 (10) を v に関する微分方程式と考える。すなわち、式 (10) は、以下のように変形される。

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{f(v) - v}{x} \tag{11}$$

式 (11) は、v に関する変数分離型

$$\frac{\mathrm{d}v}{f(v) - v} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (\text{但し } f(v) \neq v) \tag{12}$$

と変形され、

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{f(v) - v} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C = \ln x + C \tag{13}$$

と解が求められた。なおここで、ある点 $v = \alpha_1$ において $f(\alpha_1) = \alpha_1$ が満たされるときは、式 (11) に戻れば容易で、

$$\frac{y}{x} = \alpha_1, \quad \text{i.e.} \ \ y = \alpha_1 x \tag{14}$$

が元の微分方程式 (8) の解となっている。

なお、次の形の微分方程式は同次型に直すことができる

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \quad \text{ただし} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{15}$$

この場合は、

$$\begin{aligned} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 &= 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

となる点 (x_0, y_0) が定められるので、$X = x - x_0,\ Y = y - y_0$ とおけば

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \mathrm{d}X, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}Y \\ a_1x + b_1y + c_1 &= a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1 = a_1X + b_1Y \\ a_2x + b_2y + c_2 &= a_2(X + x_0) + b_2(Y + y_0) + c_2 = a_2X + b_2Y \end{aligned} \tag{16}$$

と変形され、方程式 (15) は

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{a_1 + b_1Y/X}{a_2 + b_2Y/X}\right) \tag{17}$$

と、同次型となる。

2.3 線型

$$F(x, y, y') = 0 \tag{18}$$

において、F が y, y' について線型の時、線型常微分方程式といい、方程式 (18) は

$$a_0(x)y' + a_1(x)y + a_2(x) = 0 \tag{19}$$

と書ける。このような問題が与えられるからには、最高階導関数の係数はゼロではないとしてよいであろう。従って、考えている x の定義域で $a_0(x) \neq 0$ と仮定して良く、$a_0(x)$ で式 (19) を除して、正規型（最高階導関数の係数 $= 1$）

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{20}$$

を導出し、以下この解法を検討する。

2.3.1 アイディア 1

式 (20) において、左辺がある関数の x についての微分になっていると容易である。

すなわち、

$$(uv)' = uv' + u'v \tag{21}$$

を適用できるような形式に変形したい。そこで、式 (20) の両辺に $u(x)$ を乗じ、

$$uy' + upy = uq \tag{22}$$

の左辺に対して、式 (21) の関係が適用できるようにするのである。このためには、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u' = u(x)p(x) \tag{23}$$

が必要十分で、従って、$u(x)$ に関する変数分離型の方程式

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = p(x)\mathrm{d}x \tag{24}$$

を得る。式の変形をするだけなので、u は 1 つ分かればよい。従って、

$$\ln u = \int p(x)\mathrm{d}x, \quad \text{即ち} \tag{25}$$
$$u = e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{26}$$

と、u の候補が一つ求まった。そこで、式 (20) の両辺に $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ をかけると、

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y' + p(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x) \quad \text{即ち} \tag{27}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y\right) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x) \tag{28}$$

である。式 (28) の両辺を積分すると

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y = \int \left[e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\right]\mathrm{d}x + C \quad \text{即ち} \tag{29}$$
$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}t}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x + C\right] \tag{30}$$

と、線型常微分方程式の解の一般型が求められた。

[例題] 例えば、常微分方程式として、

$$xy' + y = x^2 + x + 1 \tag{31}$$

のような方程式の一般解を求めるような問題に対して、$x \neq 0$ を仮定して

$$y' + \frac{y}{x} = x + 1 + \frac{1}{x} \tag{32}$$

などとやってはいけない。大変面倒なことになる。式 (31) の時点で、左辺の形に着目し、直ちに

$$(xy)' = x^2 + x + 1 \tag{33}$$

と変形すれば、以下容易に両辺を x で積分して一般解を求めることができる。まじめに公式 (30) を適用しても良いが、煩雑で指数の書き間違いなどを起こしやすい。演習を通じて、上手な変形をマスターして、素早く綺麗に解くコツをつかんでほしい。

2.3.2　アイディア２

テキストの 75-78 頁に述べられている方法である。線型の微分方程式の正規型 (20) は、非同次線型常微分方程式の 1 つである。そこで、

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{34}$$

に対応する同次線型常微分方程式

$$y' + p(x)y = 0 \tag{35}$$

の一般解を求め、これに式 (34) の特殊解を何らかの方法で求めて、これらを加えて式 (34) の一般解を得るという方法である。特殊解の求め方としては、一般解の任意定数 C を x の関数 $C(x)$ と仮定して式 (34) に再度代入し $C(x)$ をもとめるという、「定数変化法」が広く用いられる。

まず、同次方程式 (35) の一般解を求める。変数分離型なので、容易に一般解が求められ、

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{36}$$

となる。

次に、定数変化法によって非同次の方程式の特殊解を 1 つ見出すこととする。すなわち、

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{37}$$

が、与式 (34) の解となるように $C(x)$ を見つけることが次の課題となる。微分し計算を進める。

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + C(x)[-p(x)]e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{38}$$

であるので、式 (37) を式 (34) に代入すると

$$y' + p(x)y = C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x) \tag{39}$$

となって、

$$C'(x) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x) \quad \text{即ち} \tag{40}$$

$$C(x) = \int \left[e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\right]\mathrm{d}x + A \tag{41}$$

と、A を任意定数として関数 $C(x)$ が求められた。従って、非同次方程式 (34) の 1 つの特殊解として

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int \left\{e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\right\}\mathrm{d}x + A\right] \tag{42}$$

が得られた。

以下、この特殊解 (42) と、対応する同次方程式の一般解 (36) の和が、元の非同次方程式 (34) の一般解となっていることを示す。まず、任意定数 A に依存する非同次方程式の特殊解の一つを

$$y_A = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int\left\{e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\right\}\mathrm{d}x + A\right] \tag{43}$$

と記すこととする。そして、非同次方程式 (34) の他の任意の解として z が存在するとして、y_A との差 w を求めてみる。即ち

$$z - y_A = w \tag{44}$$

とすると、

$$w' = z' - y'_A = -p(x)z + q(x) - [-p(x)y_A + q(x)] \tag{45}$$

$$= -p(x)(z - y_A) = -p(x)w \tag{46}$$

となる。即ち差 w は

$$w' + p(x)w = 0 \tag{47}$$

となって、同次方程式 (36) の解となっている。よって本題は示された。

まとめると、非同次方程式 (34) の任意の解すなわち一般解は、A を任意定数として (43) で与えられる。

2.4 完全微分型

x, y の間の関係式が

$$f(x,y) = C \tag{48}$$

（C は定数）として与えられているような場合を考える。なお、$f(x,y)$ は 2 階まで偏微分可能で、その偏微分係数は連続と仮定しておく。

このようなときにはその全微分に対して $\mathrm{d}f = 0$ が成立することは明らかであろう。すでにベクトル解析の講義で学修したように（テキスト p.51, (2.16) 式)、

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{49}$$

であるから、これから x, y に関する微分方程式として、

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \tag{50}$$

がえられる。このような微分方程式を完全微分型という。完全微分型の微分方程式から、もとの関係式 (48) を求めることが本節の課題である。

なお、本節での f に関する仮定から、以下は明らかである。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{51}$$

多くの場合、実用上、問題は、与えられた 1 階の微分方程式が、完全微分型であるか否かの判定にかかっていることも多い。そこで、以降、

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{52}$$

の形の方程式につき、考察する。まず、式 (52) の解が $f(x,y) = C$ という形で表される必要条件は

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{53}$$

である。式 (53) を満たすとき、その微分方程式を完全微分型という。

次に十分性の確認を行う。式 (53) を仮定する。ここで、

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\mathrm{d}t + g(y) \quad (x_0 : \text{fixed}) \tag{54}$$

とおく。ただし、上式の第 1 項の不定積分では y を定数と見なす。この時、式 (54) を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \tag{55}$$

は明らかであり、前半は示された。次に式 (54) を y で偏微分したときに、式 (53) を利用すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\mathrm{d}t + g'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\mathrm{d}t + g'(y) \\ &= N(x,y) - N(x_0,y) + g'(y)\end{aligned} \tag{56}$$

と計算される。従って、式 (56) が十分性を満たすには、

$$g'(y) = N(x_0,y) \tag{57}$$

が必要十分である。これから $g(y)$ を求めることができ、

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)\mathrm{d}s \tag{58}$$

となる。(58) を (54) に代入すると、

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)\mathrm{d}s = C \tag{59}$$

となり、これが (52) の陰関数としての解を与える。

なお、数学的には上に述べたとおりなのであるが、実際に完全微分型を適用する際には、むしろ直観に依る所が大きいかもしれない。すなわち、演習問題を解くときに、いちいち $M(x,y)$ や $N(x,y)$ の形式を質して公式 (59) を適用していては時間がかかるし、大変面倒である。あまりアカデミックではないが、工学では、問題を見通しよく、素早く解くことも重要で、そのために演習の重要さも分かって頂けると思う。たとえば、以下の例題と略解を見てもらえれば明らかであろう。

[例題]

$$(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^2)\mathrm{d}y = 0 \tag{60}$$

の一般解を陰関数表示で求めよ。

[略解] 式 (60) の左辺を変形していく。

$$(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^2)\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3) = 0 \tag{61}$$

これから直観的に明らかに

$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C. \tag{62}$$

2.5 積分因子型

先に出てきた式 (52)

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{63}$$

が、完全微分型であれば、すなわち条件 (53)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{64}$$

が満たされるならば、前節の方法で解けることは理解できた。しかし、一般には、条件 (64) は満たされるとは限らない。そこで、この条件の成立しない場合、何らかの関数（即ち積分因子）$\mu(x,y)$ を (63) の両辺に掛けることにより、条件 (64) をみたすことができれば、微分方程式 (63) は完全微分型に帰着する。このように、積分因子を乗じることで完全微分型とできるような 1 階微分方程式を「積分因子型」という。

すなわち、

$$(\mu M)\mathrm{d}x + (\mu N)\mathrm{d}y = 0 \tag{65}$$

が完全微分型となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{66}$$

である。もちろん、式 (66) を解いて μ を求めることは、一般には非常に困難である。一般性は乏しいと言わざるを得ない。

しかし、基礎的な概念として、積分因子の概念は実用上、極めて重要である。先の線型微分方程式のアイディア 1 も、実は積分因子の概念の特殊例であるし、一見、非線形で極めて面倒に見える 1 階微分方程式の中には、簡単な積分因子を見出すこと等により、容易な変数分離に帰着するような方程式も存在する。演習を通じてその当たりの勘所を理解頂きたい。

以下、積分因子が比較的容易に求められる例をいくつか紹介する

1.
$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/N = \psi(x) \tag{67}$$
となるとき、
$$\mu(x,y) = \mu(x) = e^{-\int \psi(x)\mathrm{d}x} \tag{68}$$

2.
$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/M = \psi(y) \tag{69}$$
となるとき、
$$\mu(x,y) = \mu(y) = e^{\int \psi(y)\mathrm{d}y} \tag{70}$$

3.
$$x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/\left(xM + yN\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{71}$$
となるとき、
$$\mu(x,y) = \mu(y/x) = e^{\int \psi(y/x)\mathrm{d}(y/x)} \tag{72}$$

4.
$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/\left(xM - yN\right) = X(xy) \tag{73}$$
となるとき、
$$\mu(x,y) = \mu(xy) = e^{\int S(xy)\mathrm{d}(xy)} \tag{74}$$

2.6 特別なタイプの微分方程式

2.6.1 Bernoulli(ベルヌーイ) の微分方程式

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0 \tag{75}$$

ただし $n \neq 0, 1$ とする。式 (75) の型の常微分方程式を「Bernoulli の微分方程式」という。

1. アイディア 1
   Bernoulli の微分方程式の解法の 1 つは、

   $$z = y^{1-n} \tag{76}$$

   とおくことである。(76) から

   $$z' = (1-n)y^{-n}y' \tag{77}$$

   である。(75) の両辺に y^{-n} を乗じて (77) を適用すれば

   $$\frac{z'}{1-n} + p(x)z^{1-n} + q(x) = 0 \quad 即ち$$
   $$z' + (1-n)p(x)z = (n-1)q(x) \tag{78}$$

   となり、z に関する線型常微分方程式に帰着した。

2. アイディア 2
   Bernoulli の微分方程式の解法のもう 1 つは、一種の積分因子型ととらえ、$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ を式 (75) の両辺に乗じることである。この操作により式 (75) は

   $$(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y)' = -q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y^n \tag{79}$$

   と書き直すことができる。ここで、w を

   $$w = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y \tag{80}$$

   と定義し、(79) を w に関する常微分方程式に書き直すと

   $$w' = -w^n q(x)e^{(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{81}$$

   となり、w に関する変数分離型の常微分方程式に帰着した。

2.6.2　Riccati(リッカチ) の微分方程式

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \tag{82}$$

の型の非線形常微分方程式を、Riccati の微分方程式という。必ずしも求積法で解が求められる保証はないが、一つでも特殊解が分かっている場合に、それを利用して一般解が求められる例である。

仮に、関数 $y_0 = y_0(x)$ が (82) の特殊解の 1 つであるとすると、

$$y_0' + P(x)y_0^2 + Q(x)y_0 + R(x) = 0 \tag{83}$$

である。(82) から (83) を引くと、

$$(y - y_0)' + P(x)(y^2 - y_0^2) + Q(x)(y - y_0) = 0 \tag{84}$$

である。$u = y - y_0$ と未知関数を変換して、u に関する微分方程式として書き直すと、

$$u' + [2P(x)y_0 + Q(x)]u = -P(x)u^2 \tag{85}$$

となり、Bernoulli の微分方程式 (75) に帰着する。

[例題]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 3y + 2 \tag{86}$$

の一般解を求めることを考える。(86) は変数分離型ではあるが、ここではあえて、この方程式を Riccati 型と考えて、その解法を確認し、いずれの方法で求めた一般解も一致することを確認することとしよう。(86) の特殊解として定数関数が 2 つ存在し、それぞれ

$$y_0(x) = 1, 2 \tag{87}$$

となることは明らかである。このうち、$y_0(x) = 1$ を採用して、

$$y(x) = u(x) + y_0(x) = u(x) + 1 \tag{88}$$

と $u(x)$ を定義し $u(x)$ に関する微分方程式を書き下すと若干の計算の結果

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = u^2 \tag{89}$$

となり、Bernoulli 型の微分方程式となった。アイディア 1 の置換型解法を採用し、$z = u^{-1}$ として z に関する微分方程式に書き直すと、

$$z' = z - 1 \tag{90}$$

と容易な形の変数分離方程式となる。(90) の一般解は

$$
\begin{aligned}
&z = 1 + Ce^x \quad 即ち \\
&y = u(x) + 1 = \frac{1}{z(x)} + 1 = \frac{1}{1+Ce^x} + 1 = \frac{2+Ce^x}{1+Ce^x}
\end{aligned}
\tag{91}
$$

と求められる。

さて、別解として (86) を変数分離型として解いてみよう（この考え方が本来正しい）。変数分離の形に書き直すと

$$
\frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 3y + 2} = \mathrm{d}x \tag{92}
$$

である。左辺を部分分数展開して計算を進める。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y-2} - \frac{\mathrm{d}y}{y-1} &= \mathrm{d}x, \\
\int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1} \right) \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x, \\
\ln(y-2) - \ln(y-1) = \ln \frac{y-2}{y-1} &= x + C', \\
\frac{y-2}{y-1} &= -Ce^x, \\
y - 2 &= -C(y-1)e^x, \\
(1 + Ce^x)y &= 2 + Ce^x, \\
y &= \frac{2+Ce^x}{1+Ce^x}
\end{aligned}
\tag{93}
$$

となって、(91) と同一の一般解が得られることが確認された。

2.6.3 Clairaut(クレーロー) の微分方程式

次の形をした常微分方程式を Clairaut の微分方程式という。

$$
y = xy' + f(y') \tag{94}
$$

この方程式の解法は、

$$
y' = u \tag{95}
$$

とおき、(94) に代入し、両辺を x で微分することである。すなわち

$$
y = xu + f(u) \tag{96}
$$

として両辺を微分して整理すれば

$$
\begin{aligned}
y' &= u + xu' + f'(u)u' \quad \text{即ち} \\
0 &= u'[x + f'(u)]
\end{aligned}
\tag{97}
$$

を得る。(97) の解は 2 つ存在し、それぞれ

$$u' = 0 \tag{98}$$

$$x + f'(u) = 0 \tag{99}$$

と書ける。(98) および (99) はそれぞれ一般解と特異解を与える。なお、一般解に現れる任意定数を変化させても得られない形の解を「特異解 (Singular Solution)」という。「特殊解 (Particular Solution)」とは異なる概念であるので注意のこと。

1. 一般解 (98) は非常に容易に解けて

$$u = C \tag{100}$$

を得る。(100) を元の微分方程式 (94) に代入すれば、C を任意定数とする一般解

$$y = Cx + f(C) \tag{101}$$

が求められた。

2. 特異解 (99) は、(x, y) に関して u をパラメータとする解を既に与えている。即ち、

$$x = -f'(u) \tag{102}$$

$$y = -uf'(u) + f(u) \tag{103}$$

が特異解である。(102) が u について解けるならば、具体的な $u = u(x)$ を (103) に代入して $y = y(x)$ が求められることから、これで解説として十分であろう。

Clairaut の微分方程式の解の特徴として重要なことは、一般解 (101) は C をパラメータとする直線族を与え、一般に曲線となる特異解 (103) は、一般解で与えられる直線族の包絡線を与えると言うことである。逆の言い方をすると、特異解で与えられる曲線に対してその接線の集合が一般解の直線族ということである。図 1 を参照されたい。

[例題] Clairaut 型の微分方程式

$$y = xy' + (y')^2 \tag{104}$$

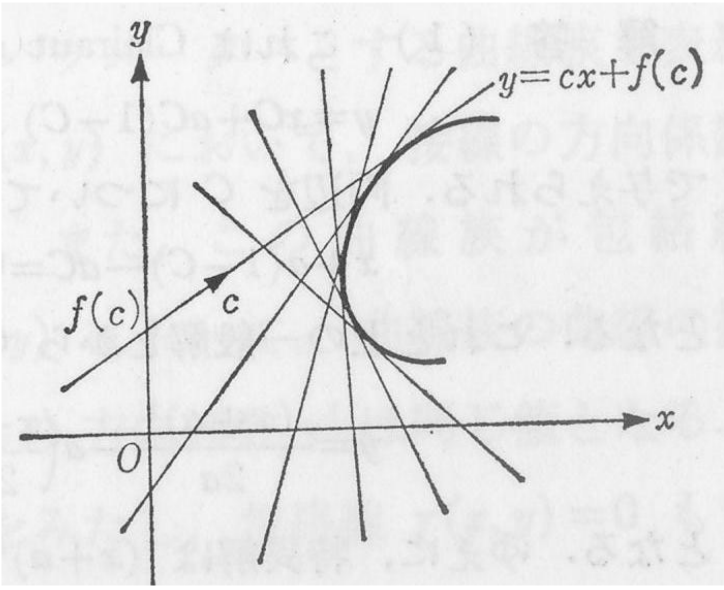

図 1　一般解の直線族と特異解としての包絡線

の解を求めてみよう。上に倣って解けば、

$$
\begin{aligned}
&[\text{一般解}] \quad y = Cx + C^2 && (105)\\
&[\text{特異解}] \quad x = -2u, \quad y = -u^2, \quad \text{即ち} \\
&\qquad\qquad\quad y = -\frac{1}{4}x^2 && (106)
\end{aligned}
$$

直線族と包絡線の関係は明らかであろう。なお、Clairaut の微分方程式の場合、初期条件に対応する解は一意とは限らないので、一意性には注意が必要である。

2.7　Lagrange の方程式

Clairaut の方程式を一般化した形の微分方程式

$$
y = g(p)x + f(p), \qquad p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{107}
$$

を考える。この場合も、解法の基本は x について微分することである。微分により、以下を得る。

$$
\begin{aligned}
&p = g'(p)p'x + g(p) + f'(p)p', \\
&\{g'(p)x + f'(p)\}p' + g(p) - p = 0, \\
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}[g(p) - p] + g'(p)x + f'(p) = 0
\end{aligned} \tag{108}
$$

となり、これは $x = x(p)$ の線形常微分方程式である。その一般解は、

$$x = \varphi(p) + Cu(p) \tag{109}$$

の形で表される。これと方程式 (107) から p を消去すれば、方程式 (107) の一般解が得られる。

2.8　階数の下げられる高階微分方程式

ここで、n 階常微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 \tag{110}$$

の階数が下げられる場合について考察する。

まず、方程式 (110) が y を含まないときは容易である。すなわち

$$F\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 \tag{111}$$

の形で与えられているとき、$y' = p$ とおけば (110) は

$$F\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) = 0 \tag{112}$$

となり、これは $(n-1)$ 階常微分方程式である。そして、(112) の一般解

$$p = \psi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}) \tag{113}$$

が求められた時、これを積分すれば方程式 (111) の一般解

$$y = \int \psi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})\mathrm{d}x + C_n \tag{114}$$

が得られる。さらに、(110) が $y, y', \cdots, y^{(r-1)}$ を含まないときにも容易に拡張できる。

これらに加えて重要なのは、(110) が x を含まないときである。すなわち

$$F\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 \tag{115}$$

の形で与えられているとき、$y' = p$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right), \cdots \tag{116}$$

であるから、これを (115) に代入すれば

$$G\left(y, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right) = 0 \tag{117}$$

となり、これは $(n-1)$ 階常微分方程式である。そして、方程式 (117) の一般解

$$p = \psi(y, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}) \tag{118}$$

が求められたとき、積分によって (115) の一般解が

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})} + C_n \tag{119}$$

と得られる。

公式 (116) は、模範方式で、この種の x を含まないタイプの問題には万能ではあるが、計算が往々にして煩雑となり、計算ミスをしやすくなるのが難点である。個々の問題に応じて見通しの良い変形が適用できる場合も多い。例えば、公式 (21) が適用できるならば、断然その方がよい（別冊演習 1.6(7) など)。このテクニックはひとえに演習を通じて身につけるものである。是非演習問題を多数解いて、楽で綺麗に解ける方法をマスターしてほしい。

2.9 大域解と局所解

任意の初期条件を満たす微分方程式の特殊解が、一意に定まるか否かは数学的には重大問題である。もちろん、工学的・物理的には、因果的に有意であるか否か、あるいは実験的な検証により、確認ができるので、余り問題となることはないかもしれないが、解の構造を理解することは抽象的に重要である。このメモのレベルでは、十分な議論はできないが、どのようなことに留意すべきなのか、ということくらいは理解してもらいたいと考えるので、本節を加える次第である。（基礎的＝理学部的な内容に余り興味がなければ飛ばしてくださって結構である。）

2.9.1 大域解の例

例えば、微分方程式

$$y' = y \tag{120}$$

を任意の初期条件

$$y_0 = y(x_0) \tag{121}$$

で解くことを考える。(120) の一般解は

$$y = Ce^x \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{122}$$

である。一般解のうち、初期条件 (121) を満たす解はただ一つであり、それは (121) を (122) に代入することで求められ、

$$C = y_0 e^{-x_0} \tag{123}$$

と求められ、よって初期条件 (121) を満たす特殊解は

$$y = y_0 e^{x - x_0} \tag{124}$$

と求められる。初期条件を満たす $-\infty < x < \infty$ の解がただ一つ存在することから、この (124) のような解を「大域解 (global solution)」という。

2.9.2 局所解の例

例えば、微分方程式

$$y' = y^2 \tag{125}$$

について、先と同様に考えてみる。まず、

$$y = 0 \tag{126}$$

は一つの解を与える。（これは特異解となっている。Clairaut の微分方程式でも登場したが、一般解の任意定数を変化させても得られない形の解を「特異解」という。）

次に、$y \neq 0$ を仮定できる場合を考え、変数分離型と考えて変形する。

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x \quad \text{これを積分して変形すると}$$

$$y = -\frac{1}{x + C} \tag{127}$$

と一般解を得る。明らかに、特異解 $y = 0$ を表現できる有界な定数 C は存在しない。

さて、初期条件の例として、

$$x = 0 \ \text{ の時に } \ y = 1 \tag{128}$$

の場合を考察しよう。(128) を (127) に代入すれば $C = -1$ は容易に求まり、よって、求めうる初期条件を満たす解は

$$y = -\frac{1}{x - 1} \tag{129}$$

となる。但し、この一般解の導出時に、$y \neq 0$ が条件であったことを忘れてはならない。即ち、与えられた初期条件に対して、解は $x < 1$ の範囲にしか存在しないのである。このような問題の場合、解の存在範囲は初期条件に依存することとなる。このような解のことを「局所解 (local solution)」という。

2.9.3　解の一意性について

さらに、初期条件を満たす解が無数に存在しうる例についても考察してみよう。例えば、

$$y' = y^{\frac{1}{3}} \tag{130}$$

を考える。まず、$y = 0$ は特異解となっている。次に、$y \neq 0$ を仮定できる場合に対して変数分離型として積分すると、一般解として

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x + C \tag{131}$$

を得る。ここで、初期条件の例として、

$$x = 0 \quad \text{の時に} \quad y = 0 \tag{132}$$

の場合を考察しよう。明らかに特異解 $y = 0$ はこの初期条件を満たし、1 つの解を与える。次に、初期条件 (132) を (131) に代入すれば $C = 0$ が得られる。よって

$$y = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} \tag{133}$$

も解であるが、この場合、これだけではないことに注意を要する。即ち、$\forall a \geq 0$ を用いて表される以下のような関数

$$\begin{aligned} y_a &= 0, \quad \text{for} \quad x \leq a \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-a)\right]^{\frac{3}{2}} \quad \text{for} \quad x > a \end{aligned} \tag{134}$$

も、また微分方程式 (130) に対して初期条件 (132) を満たす解である。a は $a \geq 0$ であれば任意であるから、解は無数に存在することになってしまう。

3　解の存在と一意性

この章も、基礎的＝理学部的な内容に余り興味がなければ飛ばしてくださって結構である。しかし、2.9.3 節で述べたように、解が存在するか否か、一意か否かは、数学的には重要問題である。本章では局所解の存在定理と一意性について議論することとする。

　微分方程式

$$y' = f(x, y) \tag{135}$$

につき、初期条件

$$y(x_0) = y_0 \tag{136}$$

を満たす解の存在及び一意性に関する定理を述べる。

「解の存在定理」関数 $f(x,y)$ は区間

$$|x - x_0| \leq a_1, \quad |y - y_0| \leq a_2 \tag{137}$$

で定義される連続関数とする。ここでそれぞれの区間について

$$\begin{aligned} I_1 &= [x_0 - a_1, x_0 + a_1] \\ I_2 &= [y_0 - a_2, y_0 + a_2] \end{aligned} \tag{138}$$

と定義しておく。

　さらに、次の条件（(139) を Lipschiz 条件という）を満たすとする。即ち、$\exists k > 0$, $\forall(x,y),(x,z) \in I_1 \times I_2$ に対して、不等式

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq k|y - z| \tag{139}$$

が成立するとする。ただし、k は x には依存しないようにとれるとする。この時、区間 $J = [x_0 - r, x_0 + r]$ で定義された (135)、(136) の解（局所解）y が存在して、しかも一意である。ただし、

$$M = \max_{(x,y) \in I_1 \times I_2} |f(x,y)| \tag{140}$$

$$r = \min(\frac{a_2}{M}, a_1) \tag{141}$$

である。

[証明]　 iteration（逐次近似法）による。即ち、定数関数 $y_0(x) = y_0$ から出発して逐次の積分により関数列 $y_n(x)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right) \mathrm{d}t \qquad (142) \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1(t)\right) \mathrm{d}t \\ &\cdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) \mathrm{d}t \qquad (143) \end{aligned}$$

このように関数列 $\{y_n(x)\}$ を定義したとき、この関数列が $n \to \infty$ の極限で $y(x)$ に一様収束することを示そう。それができれば、(143) の両辺で $n \to \infty$ とすると

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) \mathrm{d}t \tag{144}$$

となって、区間 $J = [x_0 - r, x_0 + r]$ で定義された (135)、(136) の解（局所解）が得られたことになる。

ここで、ひとまず $x > x_0$ としておく（そうでない場合にも容易に拡張できる）。関数列 $\{y_n(x)\}$ の差分について考察する。

$$y_2(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)\right] \mathrm{d}t, \tag{145}$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)| \, \mathrm{d}t \tag{146}$$

$$\le k \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_0| \, \mathrm{d}t \tag{147}$$

となる。なお、(146) から (147) の不等号計算においては Lipschiz 条件 (139) を用いた。同様にして、

$$|y_{n+1}(x) - y_n x| \le k \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \, \mathrm{d}t \tag{148}$$

である。(148) で $n = 0$ の場合を考えるには、(142) に戻れば計算を進めることができて、

$$|y_1(x) - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| \mathrm{d}t \le M(x - x_0) \tag{149}$$

となる。ただし、上式の変形で (140) を用いた。次に (149) を (147) に代入すると、

$$|y_2(x) - y_1(x)| \le k \int_{x_0}^{x} M(t - x_0) \mathrm{d}t = Mk \frac{(x - x_0)^2}{2!} \tag{150}$$

が成立することが示される。以下、順次 n の 1 ずつ大きい差分に関して絶対値を評価し続けることにより

$$|y_n(x) - y_{n-1}| \le Mk^{n-1} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \tag{151}$$

が予想される。これを (148) に代入すると、

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le k \int_{x_0}^{x} Mk^{n-1} \frac{(t - x_0)^n}{n!} \mathrm{d}t = Mk^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{152}$$

となって、(151) は n が $(n+1)$ の場合にも成立していることが示された。従って、任意の自然数 n に対して (151) は成立することが証明された。

ついで、このようにして求めた関数列 $\{y_n(x)\}$ が、求めうる解 $y(x)$ に一様収束することを確かめる。そのためには、この関数列 $\{y_n(x)\}$ が、Cauchy 列であることを示せば必要十分である。

そこで、各階差のノルムを、区間 $J=[x_0-r,x_0+r]\subset I_1$ における階差の絶対値の n にわたっての最大値

$$\max_{x\in J}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|=\|y_n-y_{n-1}\| \tag{153}$$

と定義すると、(151) から

$$\begin{aligned}\|y_n-y_{n-1}\| &\leq \frac{M}{k}\cdot\frac{(kr)^n}{n!},\\ \therefore\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n-y_{n-1}\| &\leq \frac{M}{k}\cdot e^{kr}\end{aligned} \tag{154}$$

となるので、自然数の組 $\forall n>\forall m$ に対して

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\| &\leq \|y_n-y_{n-1}\|+\|y_{n-1}-y_{n-2}\|+\cdots+\|y_{m+1}-y_m\|\\ &=\sum_{p=m+1}^{n}\|y_p-y_{p-1}\|\leq\sum_{p=m+1}^{\infty}\|y_p-y_{p-1}\|\end{aligned} \tag{155}$$

となる。従って、

$$\begin{gathered}\forall\epsilon>0,\exists m_0,\forall n>\forall m>m_0\quad\text{に対して}\\ \|y_n-y_m\|<\epsilon\end{gathered} \tag{156}$$

となる。従って、$\{y_n(x)\}$ は、Cauchy 列である。よって、$\{y_n(x)\}$ は、$n\to\infty$ の時、$y(x)$ に一様収束する。ここで、連続関数列の一様収束極限もまた、連続関数である。すなわち、$y(x)$ は連続関数である。従って、

$$\begin{aligned}&y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\mathrm{d}t\quad\text{において}\quad n\to\infty\quad\text{とすれば}\\ &y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(t,y(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{157}$$

となって、解が求まった。

解の存在を吟味してみよう。解を逐次近似で求める際に、解の定義区間が $y(x)$ の定義区間内に収まることが重要である。ここで、

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{158}$$

であり、$f(x, y)$ は区間 $I_1 \times I_2$ 上で定義されている。ここに、$I_2 = [y_0 - a_2, y_0 + a_2]$ である。従って、この I_2 の区間を決定する a_2 の大きさで $y_1(x)$ と y_0 の差の絶対値が押さえ込まれていれば収束半径条件を満たすことになる。すなわち

$$|y_1(x) - y_0| \leq M(x - x_0) \leq a_2 \tag{159}$$

であればよいことになる。そこで、$x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ を満たす x に対して

$$M(x - x_0) \leq Mr \leq a_2 \tag{160}$$

であるかどうかを確認するのだが、もともと、(141) ととってあるので、$r \leq a_2/M$ は満たされている。それゆえ、

$$|y_n(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))|\mathrm{d}t \leq M(x - x_0) \leq Mr \leq a_2 \tag{161}$$

となる。故に、$y(x)$ を、$f(t, y),\ y = y_n(x)$ の積分から求めることが可能である。

ついで、解の一意性を検討する。ここで、y, z は、ともに (144) の解であるとする。すなわち、

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \tag{162}$$

$$z = z_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\mathrm{d}t \tag{163}$$

とする。(162) − (163) の絶対値をとれば

$$|y(x) - z(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\mathrm{d}t \leq k \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\mathrm{d}t \tag{164}$$

となる。第 1 段階の近似として、Lipschiz 条件から、

$$|y(x) - z(x)| \leq 2M(x - x_0) \tag{165}$$

となるので、これを (164) の右辺に代入すれば、

$$|y(x) - z(x)| \leq 2Mk \int_{x_0}^{x} (t - x_0)\mathrm{d}t = 2kM \frac{(x - x_0)^2}{2!} \tag{166}$$

を得る。再び (164) の右辺に代入すれば、

$$|y(x) - z(x)| \leq 2Mk^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!} \tag{167}$$

を得る。上記の操作を n 回繰り返すことにより、一般の n に対して

$$|y(x) - z(x)| \leq 2Mk^{n-1} \cdot \frac{r^n}{n!} \tag{168}$$

を得る。そして、(168) において、$n \to \infty$ とすることにより、$n!$ は $(rk)^n$ より高位の無限大であることに留意すれば

$$|y(x) - z(x)| = 0 \tag{169}$$

が証明された。すなわち、２つ解があると仮定するとそれらは必ず同一のものであり、解の一意性が証明された。

4　高階線型常微分方程式

4.1　基本的事項

高階線形常微分方程式に関する基本的事項は、テキストに詳しい。このメモでは、重要事項の確認と若干の補足を行う。

ここに、$x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ の関数 F に関する方程式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{170}$$

があり、$y, y', \cdots, y^{(n)}$ について線型であるとする。その場合の (170) の一般型は

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{171}$$

である。ここに、$p_0(x), \cdots, p_n(x), q(x)$ は、区間 $\exists I_0$ で連続とする。以前の 1 階線型常微分方程式 (19) の議論と同様、$p_0(x)$ は I 上で 0 にならないと仮定して良いであろう。ならば、$p_0(x)$ で除して正規型に直せることとなる。この仮定の下に、$p_0(x) \equiv 1$ として一般性を失わない。よって以下、

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{172}$$

につき、考察する。式 (172) において、$q(x) \equiv 0$ のとき、式 (172) は同次（あるいは斉次; homogeneous)、$q(x) \not\equiv 0$ のとき、非同次（あるいは非斉次; non-homogeneous）と呼ばれる。

次に、微分作用素 L を、次のように定義する。

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \quad \text{すなわち} \tag{173}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_n(x) \\ &= D^n + p_1(x)D^{n-1} + \cdots + p_n(x)D^0 \end{aligned} \tag{174}$$

とする。ただし、$D^0 \equiv I$ とする（但し I は恒等変換)。この時、同次方程式、非同次方程式は、それぞれ

$$Ly = 0 \tag{175}$$

$$Ly = q(x) \tag{176}$$

と書ける。L は線型演算子であるから、$\forall y_1, \forall y_2$, および $\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbf{R}$ に対して、

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) \tag{177}$$

が成立する。

以下、重要な 2 つの定理を示す。

１．L を線形微分作用素とし、微分方程式

$$L(y) = 0 \tag{178}$$

を考える。ここで、y_1, y_2 が (178) の解ならば、$\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbf{R}$ に関して $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ もまた、(178) の解である。証明は

$$L(y_3) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = 0 \tag{179}$$

と、容易である。

２．線形非同次の微分方程式

$$L(y) = q(x) \tag{180}$$

を考える。(180) に対して、

$$L(y) = 0 \tag{181}$$

を随伴同次方程式という。さて、y_p を、(180) の 1 つの特殊解とする。このとき、任意の (180) の解を y とすると、$z = y - y_p$ は、(181) の解となっている。証明は

$$L(z) = L(y) - L(y_p) = q(x) - q(x) \equiv 0 \tag{182}$$

とやはり容易である。従って、(180) の一般解は、(180) の 1 つの特殊解 +(181) の一般解、と結論することができる。

4.2 同次方程式

任意定数で結合された一般解で、全ての解を記述することが可能であるかどうか（完全性という）の確認が必要である。以下、若干の線形代数的考察を交えつつ、一般解の完全性を検討する。

線形同次常微分方程式

$$L(y) = 0, \quad \text{ただし} \tag{183}$$
$$L = D^n + p_1(x)D^{n-1} + \cdots + p_n(x)D^0 \tag{184}$$

に対して、n 個の解 $y_1, y_2, \cdots y_n$ が存在したとする。前節の考察からそれらの線形結合 $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ $(c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{R})$ も (183) の解である。しかしながら、(183) の任意の解は、解の組 $(y_1, \cdots, y_n)$ があって、それらの線形結合 $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ で表されるかどうかは検討が必要である。その条件を検討しよう。

まず、与えられた同次線形常微分方程式に対して、初期条件

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_0', \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{185}$$

が与えられたとする。もちろん (185) の右辺は全て定数である。(185) を満たす微分方程式 (183) の解は、Lipschiz 条件からただ一つ存在する。そこで、(183) の解が n 個存在したとして、$y_1, \cdots, y_n$ とする。そして、$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ が (185) を満たすように、$c_1, \cdots, c_n$ を選ぶこととし、その条件を検討する。条件を代入して計算を進めると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) &= c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + \cdots + c_ny_n'(x_0) = y_0', \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{186}$$

である。ここで、以下の行列と縦ベクトルを定義する。

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{187}$$

このように $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を定義すると、(186) は、

$$A(x_0)\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{188}$$

となる。ここで、$A(x_0), \mathbf{b}$ は既知、$\mathbf{c}$ は未知量である。(188) において、$\mathbf{c}$ がただ一つ求まるということは、線形代数学の教えるところによれば、$\det A(x_0) \neq 0$ と必要十分である。

従って、$(y_1, \cdots, y_n)$ を、(183) の解の組であるとするときに、$\det A(x_0) \neq 0$ ということと、任意の初期条件 (185) を満たす解 y が $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ で表されることとは、必要十分である。このとき、$(y_1, \cdots, y_n)$ を基本解、$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ を一般解という。

次に、Wronsky 行列式（ロンスキー行列式、ロンスキアン Wronskian）$W(x)$ を以下のように定義する。

$$W(x) = \det A(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{189}$$

以下の重要な定理が存在する。

[定理] $(y_1, \cdots, y_n)$ を (181) の解とする。この時、

$$A(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{190}$$

と関数行列 $A(x)$ を定義し、その関数行列式 $W(x) = \det A(x)$ を計算すると、$W(x)$ は恒等的に 0 であるかまたは定義域全体にわたって 0 をとらないかのいずれかである。また結論を先に述べれば、Wronskian は以下のように計算される。

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t} \tag{191}$$

[略証] 関数行列式に対して微分操作を行う場合、積に関する微分の性質を適用すれば一般の関数行列式 $A(x)$ について

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\det A(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} A_{11}(x) & \dots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & \dots & A_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(x) & \dots & A_{nn}(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A'_{11}(x) & \dots & A'_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & \dots & A_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(x) & \dots & A_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11}(x) & \dots & A_{1n}(x) \\ A'_{21}(x) & \dots & A'_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(x) & \dots & A_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots \\
&\quad + \begin{vmatrix} A_{11}(x) & \dots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & \dots & A_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{n1}(x) & \dots & A'_{nn}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{192}
$$

となる。Wronskian の場合には、$A_{ij} = y_j^{(i-1)}(x)$ である点に留意して (192) を適用すると、一次従属の行ベクトルが次々と現れるために最後の 1 項を除いてはすべて行列式が 0 となり、(192) の最後の行の項のみが残ることとなる。即ち

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \tag{193}
$$

となる。この最後の行の各項に、もとの微分方程式 (181) から得られる関係式

$$
y_i^{(n)} = -(p_1 y_i^{(n-1)} + \cdots + p_n y_i) \tag{194}
$$

を代入し、計算を進める。

$$
\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \sum_{k=1}^n p_k y_1^{(n-k)} & \dots & \sum_{k=1}^n p_k y_n^{(n-k)} \end{vmatrix} \tag{195}
$$

上式の最終行に関する行列式の線型性から

$$-\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ \sum_{k=1}^n p_k y_1^{(n-k)} & \cdots & \sum_{k=1}^n p_k y_n^{(n-k)} \end{vmatrix} = -\sum_{m=1}^n p_m \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-m)} & \cdots & y_n^{(n-m)} \end{vmatrix} \tag{196}$$

となるが、(196) の右辺行列式の最終行のベクトルは、上の行のベクトルと一次独立なものは $m=1$ に限られる。従って、行列式として 0 でない項は $m=1$ のみとなって

$$-\sum_{m=1}^n p_m \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-m)} & \cdots & y_n^{(n-m)} \end{vmatrix} = -p_1 \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1 W(x) \tag{197}$$

となる。即ち、(193)-(197) から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) = -p_1 W(x) \tag{198}$$

と $W(x)$ に関する変数分離型の 1 階常微分方程式が得られた。これを解けば、一般解として

$$W(x) = C \exp\left[-\int p_1(x)\mathrm{d}x\right] \tag{199}$$

となる。$x = x_0$ の時に $W = W(x_0)$ が与えられていれば、特殊解として

$$W(x) = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t\right] \tag{200}$$

が、求めうる Wronskian $W(x)$ である。これは定数 $W(x_0) = 0$ の時に恒等的に $W(x) \equiv 0$、定数 $W(x_0) \neq 0$ の時には有界な x の範囲では 0 をとらない。　[証明終]

4.3 高階定数係数線形同次常微分方程式の一般解

テキストに簡略にまとめられているとおりである。線形常微分方程式

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{201}$$

において、$p_0(x) = p_0 \neq 0, p_1(x) = p_1, \cdots, p_n(x) = p_n$ のように係数がすべて実定数の場合を考える。すなわち、

$$Ly = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0 \quad p_0, p_1, \cdots, p_n \text{は実定数} \tag{202}$$

を考える。微分作用素を $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ と表すと仮定する。このとき、(202) は

$$Ly = (p_0 D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_n)y = 0 \tag{203}$$

となる。これに対応して、以下の ξ に関する代数方程式

$$f(\xi) = p_0 \xi^n + p_1 \xi^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \tag{204}$$

を、(203) の特性方程式という。特性方程式 (204) が実根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ をもつとし、その重複度 (multiplicity) をそれぞれ $m_1, m_2, \cdots, m_r$ とする。さらに特性方程式 (204) は、$\lambda_k, \mu_k \in \mathbf{R}$ として複素根 $\lambda_k + i\mu_k,\ \ (k = 1, 2, \cdots, q)$ を持つとし、その重複度を n_k とする。

このとき、(202) の n 個の 1 次独立な解（基本解）は、次の 1 および 2 で与えられる。

1. $\alpha_j\ (j = 1, 2, \cdots, r)$ に対応して

$$x^{m_j - 1} e^{\alpha_j x}, x^{m_j - 2} e^{\alpha_j x}, \cdots, e^{\alpha_j x} \tag{205}$$

2. $\lambda_k + i\mu_k\ (k = 1, 2, \cdots, q)$ に対応して

$$\begin{aligned} &x^{n_k - 1} e^{\lambda_k x} \cos \mu_k x, x^{n_k - 2} e^{\lambda_k x} \cos \mu_k x, \cdots, \cos \mu_k x, \\ &x^{n_k - 1} e^{\lambda_k x} \sin \mu_k x, x^{n_k - 2} e^{\lambda_k x} \sin \mu_k x, \cdots, \sin \mu_k x, \end{aligned} \tag{206}$$

以下、$n = 2$ の場合の例である。微分作用素は

$$L = p_0 D^2 + p_1 D + p_2 \quad (p_0 \neq 0) \tag{207}$$

対応する特性方程式は

$$f(\xi) = p_0 \xi^2 + p_1 \xi + p_2 \quad (p_0, p_1, p_2 \in \mathbf{R}) \tag{208}$$

である。特性方程式の判別式の符号に応じて、解のパターンが 3 通りありうる。

1. $p_1^2 - 4p_0 p_2 > 0$ の場合
   特性方程式は相異なる 2 実根 α_1, α_2 をもつ。同次方程式の基本解は $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}$、一般解は $C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$ となる。
2. $p_1^2 - 4p_0 p_2 = 0$ の場合
   特性方程式は実重根 α を持つ。同次方程式の基本解は $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$、一般解は $C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$ となる。
3. $p_1^2 - 4p_0 p_2 < 0$ の場合
   特性方程式は複素共役根 $\lambda \pm i\mu$ をもつ。$(\mu \neq 0, \lambda, \mu \in \mathbf{R})$ 同次方程式の基本解は $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$、一般解は $C_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + C_2 e^{\lambda x} \sin \mu x$ となる。

4.4 非同次線形常微分方程式の解法

これもテキストに述べられているとおりである。このメモでも先に 2.3 で述べたように、非同次線形常微分方程式の一般解は、対応する同次方程式の一般解に、非同次方程式の特殊解を加えたものに等しい。従って、これ以降は非同次方程式の特殊解を 1 つ見いだす作業について述べることとする。

4.4.1 未定係数法

テキストにある方法である。もう少し丁寧に述べてみよう。ここでは、次のような 2 階の定数係数 2 階線形微分方程式を例にとる。高階の場合にも容易に拡張できよう。

$$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = g(x) \tag{209}$$

式 (209) の $g(x)$ の幾つかの形について、場合分けをして検討する。

1. $g(x) = e^{rx} Q(x)$ のとき (r: 実数)
   ただし、$Q(x)$ は n 次多項式で

   $$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{210}$$

   とする。これは問題の中に与えられている。
   さて、求めたい特殊解を y_{p} を

   $$y_{\mathrm{p}} = e^{rx} P(x) \tag{211}$$

   とおく。ただし、$P(x)$ は m 次の多項式であり、

   $$P(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m \tag{212}$$

   であるとする。ここで各ベキの係数を比較して $m, b_0, b_1, \ldots, b_m$ を決定する作業を行えば良い。そこで、(211) を (209) に代入すると

   $$\begin{aligned} & p_0 y_{\mathrm{p}}'' + p_1 y_{\mathrm{p}}' + p_2 y_{\mathrm{p}} \\ &\quad = (p_0 r^2 + p_1 r + p_2) e^{rx} P(x) + (2 r p_0 + p_1) e^{rx} P'(x) + p_0 e^{rx} P''(x) \\ &\quad \equiv e^{rx} Q(x) \end{aligned} \tag{213}$$

   が x についての恒等式でなければならないことになる。すなわち e^{rx} で除して

   $$(p_0 r^2 + p_1 r + p_2) P(x) + (2 r p_0 + p_1) P'(x) + p_0 P''(x) = Q(x) \tag{214}$$

であるが、上式は左辺が m 次多項式 (m は未定)、右辺が n 次多項式である。さてここで、特性多項式として $f(\xi)$ を

$$f(\xi) = p_0\xi^2 + p_1\xi + p_2 \tag{215}$$

と定義する。この時、
「$f(r)$ がゼロか否かが重要問題」となる。

(a) $f(r) \neq 0$ のとき

すなわち、r が特性多項式の根でない場合、(214) の左辺の $P(x)$ の係数がゼロでないことになる。従って、$P(x)$ は n 次多項式となり、すなわち $m = n$ となる。そこで式 (212) にある $b_0, b_1, \ldots, b_n$ を、b_0 から順次、式 (214) が成り立つ様に定めれば良い。

具体的にいうと、例えば

$$y'' - y' - 6y = e^x \tag{216}$$

の問題の特殊解を求めることに対応する。特殊解の候補は、A を定数として、$y = Ae^x$ を問題の式に代入すれば容易に求めることができる。

(b) $f(r) = 0$、ただし単根の場合

(214) の左辺の $P(x)$ の係数はゼロとなってしまう。
次に $P'(x)$ の係数について考える。一般に $f(r) = 0$ の解は

$$r = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_0p_2}}{2p_0}, \tag{217}$$

となるが、ここでは単根なので

$$p_1^2 - 4p_0p_2 > 0 \tag{218}$$

である。従って

$$2p_0r + p_1 = \pm\sqrt{p_1^2 - 4p_0p_2} \neq 0 \tag{219}$$

である。その結果、(214) は次の様になった。

$$(2p_0r + p_1)P'(x) + p_0P''(x) = Q(x). \tag{220}$$

$Q(x)$ は n 次であるから、$P'(x)$ が n 次、すなわち $P(x)$ は $m=(n+1)$ 次でなければならない。従って

$$P(x)=b_0x^{n+1}+\cdots+b_nx+b_{n+1} \tag{221}$$

となる。右辺に a_{n+1} は現れないから、左辺の b_{n+1} は任意であり、ゼロとするのが最も簡単である。実際、

$$e^{rx}P(x)=e^{rx}(b_0x^{n+1}+\cdots+b_nx)+b_{n+1}e^{rx} \tag{222}$$

であるから、上式の右辺の最後の項は同次方程式の解であることが分かる。それゆえ、

$$P(x)=x(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n) \tag{223}$$

とすればよく、改めて $\overline{P}(x)$ を n 次多項式として

$$y_{\mathrm{p}}=e^{rx}x\overline{P}(x) \tag{224}$$

とおいて係数を決める作業を実施する、ということになる。

具体的にいうと、例えば

$$y''-y'-6y=e^{3x} \tag{225}$$

の問題の特殊解を求めることに対応する。特殊解の候補は、A を定数として、$y=Ae^{3x}$ としても、求めることはできない。なぜなら、$y=e^{3x}$ は、対応する同次方程式の一般解の一つだからである。この場合は、代わりに $y=Axe^{3x}$ を問題の式に代入すれば容易に求めることができる。

（c）$f(r)=0$、重根の場合

この場合は式 (217) を見れば明らかな様に

$$r=\frac{p_1}{2p_0} \tag{226}$$

である。その結果、(214) は次の様になった。

$$p_0P''(x)=Q(x). \tag{227}$$

$Q(x)$ は n 次であるから、$P''(x)$ が n 次、すなわち $P(x)$ は $m = (n+2)$ 次でなければならない。従って

$$P(x) = b_0 x^{n+2} + b_1 x^{n+1} \cdots + b_{n+1} x + b_{n+2} \tag{228}$$

と置くこととなる。上と同様に、b_{n+1}, b_{n+2} は任意である。なぜなら $(b_{n+1}x + b_{n+2})e^{rx}$ は同次方程式の解だからである。そこで、$b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ としておけば十分である。そして、

$$P(x) = x^2(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n) \tag{229}$$

と置けばよく、改めて $\tilde{P}(x)$ を n 次多項式として

$$y_{\mathrm{p}} = e^{rx} x^2 \tilde{P}(x) \tag{230}$$

とおいて係数を決める作業を実施する、ということになる。

具体的にいうと、例えば

$$y'' - 2y' + y = e^x \tag{231}$$

の問題の特殊解を求めることに対応する。特殊解の候補は、A を定数として、$y = Ae^x$ としても $y = Axe^x$ としても、求めることはできない。なぜなら、これらは、対応する同次方程式の一般解だからである。この場合は、代わりに $y = Ax^2e^x$ を問題の式に代入すれば容易に求めることができる。

2. $g(x) = e^{\lambda x}\cos\mu x \cdot Q(x)$, あるいは $g(x) = e^{\lambda x}\sin\mu x \cdot Q(x)$ のとき　(ただし、$\mu \neq 0$, $Q(x)$ は n 次実係数多項式とする)

   ほぼ 1. と同様である。$r = \lambda + i\mu$ とおいて、$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = e^{rx}Q(x)$ の特殊解を求める問題に帰着する。

4.4.2 Lagrange の定数変化法

テキストや前節にあるように、直観に応じて、種々の解の形を仮定し、代入して求めるということもよく行われるが、見通しの難しい場合もあろう。

そこで、ここではもっとも普遍的な方法の一つである Lagrange の定数変化法について述べる。ここでは話を 2 階線形に限るが、高階への拡張も容易に類推できよう。ここで

は、与えられた非同次方程式が

$$Ly = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = g(x) \tag{232}$$

の形に与えられているとする。また、対応する同次方程式

$$Ly = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{233}$$

の一般解が、$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ としてすでに求められているとする。これは一般解であるので、対応する Wronsky 行列式はゼロではない、すなわち、

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{234}$$

である。

　定数変化法の基本は、特殊解 y_p が

$$y_p = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{235}$$

のように書けると仮定することである。ただし、付帯条件として、

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{236}$$

としておく。(235) を、与えられた方程式 (232) に代入し $C_1(x), C_2(x)$ を見いだすのが以降の課題である。代入し計算を進めるべく、y_p の微分を計算してみる。

$$y_p'(x) = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' \tag{237}$$

となるが、ここで条件 (236) より、(237) は

$$y_p'(x) = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' \tag{238}$$

となる。さらに 2 階微分を計算すると

$$y_p''(x) = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' \tag{239}$$

となる。(239) と (238) を (232) に代入すると

$$\begin{aligned} Ly_p &= y_p'' + p_1(x)y_p' + p_2(x)y_p \\ &= C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' \\ &\quad + p_1(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + p_2(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1(x)Ly_1 + C_2(x)Ly_2 \\ &= C_1'y_1' + C_2'y_2' \end{aligned} \tag{240}$$

となる。従って、$C_1'(x), C_2'(x)$ に関して、

$$Ly_p = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x) \tag{241}$$
$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{242}$$

となる。(234) であるから、$C_1'(x), C_2'(x)$ は容易に求まり、

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} \\ C_2'(x) &= \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} \end{aligned} \tag{243}$$

となる。すなわち、

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}\mathrm{d}x \\ C_2(x) &= \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{244}$$

となり、特殊解の 1 つを見いだすことができた。

5 連立常微分方程式

5.1 準備

本節では、記号の取り方をここまでと少し変えて、t を独立変数として、未知関数を $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ とする。

ここで、n 階の常微分方程式 $y = y(t)$ が、

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{245}$$

と与えられているとする。そして、

$$y = x_1, y' = x_2, \cdots, y^{(n-1)} = x_n \tag{246}$$

とおくと、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} x_1' &= y' = x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= y^{(n)} = f(t, y, \cdots, y^{(n-1)}) = f(t, x_1, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{247}$$

すなわち、高階の微分方程式（系）は、未知関数を適当に増やすことによって、必ず 1 階の微分方程式系に帰着されることとなる。従って、このメモ中では、 1 階連立常微分方程式のみを扱うこととする。

ここで、t を独立変数とし、未知関数を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする。そして、

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{248}$$

とする。右辺は与えられているとする。そして、次のような n 次元ベクトル値関数 $\mathbf{x}(t)$ 等を導入する。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \tag{249}$$

これらの導入により、1 階微分方程式系を以下のように書くことができる。

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{250}$$

また、初期条件は

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} \tag{251}$$

と書かれる。

通常の実数の絶対値に対応するものとして、ベクトル $\mathbf{x}$ ではノルムを以下のように定義する。以下、実数との対応関係を示す。

$$|x| \quad \Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \tag{252}$$

これにより、 2 つの値の距離を定義できる。

$$|x - y| \quad \Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{253}$$

三角不等式としては、

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \tag{254}$$

また Schwarz の不等式は、内積に関連するもので

$$|xy| = |x| \cdot |y| \quad \Longleftrightarrow \quad |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \tag{255}$$

となる。ベクトル値関数の連続性の定義は

$$\lim_{t \to t_0} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)\| = 0 \tag{256}$$

であるが、もう少し解析学的な言葉で書けば、以下のようである。すなわち $\forall \epsilon > 0$ に対して、$\exists \delta > 0$ が存在し、$|\forall t - t_0| < \delta$ なる $\forall t$ に対して $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)\| < \epsilon$ となるようにすることができる。有限次元ベクトル値関数の場合、$\mathbf{x}(t)$ が連続関数ということは、各成分 $x_i(t)$ が連続関数、ということである。

次に、積分を以下のように定義する。

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}(t) \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_1} x_1(t) \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} x_n(t) \mathrm{d}t \end{pmatrix} \tag{257}$$

実関数に関して成立していた以下の不等式も、同様にノルムについて成立する。すなわち

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} x(t) \mathrm{d}t \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |x(t)| \mathrm{d}t \tag{258}$$

に対応して、

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}(t) \mathrm{d}t \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{x}(t)\| \mathrm{d}t \tag{259}$$

が成立する。(259) の証明はおよそ以下の通りである。まず、積分の定義に基づけば、区分求積法から

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}(t) \mathrm{d}t = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{\xi_i \in I_i} \mathbf{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \tag{260}$$

である。ただし、Δ は各分割区間の長さを示し、$\Delta = (I_1, I_2, \cdots)$ とする。これより、

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\xi_i \in I_i} \mathbf{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| &\leq \sum \|\mathbf{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| \quad (\text{三角不等式より}) \\ &= \sum \|\mathbf{x}(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) \end{aligned} \tag{261}$$

となる。(261) で、$|\Delta| \to 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned} \text{右辺} &\to \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{x}(t)\| \mathrm{d}t \\ \text{左辺} &\to \left\| \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}(t) \mathrm{d}t \right\| \end{aligned} \tag{262}$$

と、(259) が証明された。（証明終）

5.2 局所解の存在定理

先に、高階線形常微分方程式に対して局所解の存在を Lipschiz 条件 (139) で議論したが、同様の議論が線形常微分方程式系でも可能である。すなわち、線形微分方程式系

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{263}$$

に対して、以下の「局所解の存在定理」が成立する。

以下の 2 つの条件、すなわち

1. 連続性
   $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ は $(t, \mathbf{x})$ の関数として連続である。（$(n+1)$ 変数の連続関数）
2. Lipschiz 条件
   $\mathbf{x}$ について Lipschiz 条件を満たす、すなわち有界な正数 $\exists k < +\infty$ が存在して

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq k \cdot \|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2\| \quad \text{for} \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \tag{264}$$

   であるとする。

が成立しているとする。このとき、 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たす (263) の解が t_0 の近傍にただ一つ存在する。（証明略）

5.3 線形 1 階常微分方程式系

ここでは問題として以下のような線形常微分方程式系

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{265}$$

を考える。線形とは、「$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ が $\mathbf{x}$ について線形」ということである。すなわち $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ が線形写像であるということであるから、

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{266}$$

である。ここに、$A(t)$ は n 次の正方行列、また $\mathbf{b}(t)$ は n 次の縦ベクトルで、各成分は t の関数である。

高階常微分方程式と同様、$\mathbf{b}(t) \equiv 0$ の型の方程式系

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\mathbf{x} \tag{267}$$

を「同次方程式（または斉次方程式)」という。$\mathbf{b}(t) \not\equiv 0$ の場合、すなわち

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{268}$$

の場合を「非同次方程式（または非斉次方程式)」という。(268) の 2 つの解を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とし、その差を $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ とする。このとき、その微分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_2}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{x}_1 + \mathbf{b} - (A\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}) \\ &= A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{y} \end{aligned} \tag{269}$$

となる。すなわち、$\mathbf{y}$ は同次方程式 (267) の解である。

同様に、同次方程式に関して、$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が (267) の解であれば、その線形結合 $\mathbf{x}$ もまた (267) の解である。証明は容易で、

$$\mathbf{x}' = c_1\mathbf{x}_1' + c_2\mathbf{x}_2' = c_1 A\mathbf{x}_1 + c_2 A\mathbf{x}_2 = A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = A\mathbf{x} \tag{270}$$

であるからである。

5.3.1 Wronsky 行列式

与えられた初期条件を満たす解の存在について検討してみよう。(268) に対する初期条件として、

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \tag{271}$$

が与えられているとする。(268) に対して、n 個の解 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ が与えられているとすると、線形性から、その 1 次結合も (268) の解である。すなわち $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ も (268) の解であり、以下の課題は初期条件を満たすように係数 $c_1, \cdots, c_n$ を決定することとなる。すなわち、連立方程式

$$c_1\mathbf{x}_1(t_0) + c_2\mathbf{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{272}$$

を解けばよい。(272) は成分で書けば

$$\begin{aligned} c_1 x_1^{(1)} + \cdots + c_n x_1^{(n)} &= x_1^{(0)} \\ &\vdots \\ c_n x_n^{(1)} + \cdots + c_n x_n^{(n)} &= x_n^{(0)} \end{aligned} \tag{273}$$

となる。従って、$c_1, \cdots, c_n$ が一意に求められるための必要十分条件は

$$\det(\mathbf{x}_1(t0), \cdots, \mathbf{x}_n(t_0)) \neq 0 \tag{274}$$

となる。

以上の考察から、t_0 における任意の初期条件に対する解を求めるためには、t_0 において一次独立な n 個の解を求めればよいことになる。解はそれらの一次結合で表される。

先の高階常微分方程式と同様に、次のように Wronskian を定義する。すなわち $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ が微分方程式 $\mathbf{x}'_i = A\mathbf{x}_i$ の解であるとき、n 次の正方行列 $X(t) = (\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t))$ の行列式 $|X(t)| = \det(\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)) = W(t)$ を、Wronskian という。

連立常微分方程式の Wronskian に対して、以下の等式が成立する。

$$W'(t) = \mathrm{tr}A \cdot W(t) \tag{275}$$

[証明]

$$W'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \tag{276}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t)' & x_1^{(2)}(t)' & \cdots & x_1^{(n)}(t)' \\ x_2^{(1)}(t) & \cdots & \cdots & x_2^{(n)}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t)' & \cdots & \cdots & x_2^{(n)}(t)' \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} + \cdots$$

と計算される。ここで、$\mathbf{x}'_i = A\mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ の第 k 成分に着目すると、

$$x_k'^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) x_j^{(i)} \tag{277}$$

であるから、これを Wronskian の k 行目に代入してみる。

$$\begin{aligned} x_k'^{(1)} &= a_{k1}x_1^{(1)} + a_{k2}x_2^{(1)} + \cdots + a_{kn}x_n^{(1)} \\ &= \{a_{k1}\mathbf{y}_1 + a_{k2}\mathbf{y}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{y}_n\} \quad \text{の第 1 成分} \end{aligned} \tag{278}$$

と書き直す。ただし、$\mathbf{y}_i$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(n)}) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_n &= (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \cdots, x_n^{(n)}) \end{aligned} \tag{279}$$

と定義した。従って、(276) の k 番目の項について

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k'^{(1)}(t) & \cdots & x_k'^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \det \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_j \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = a_{kk} \det \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_j \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = a_{kk} W(t) \tag{280}$$

となる。ゆえに、

$$W(t)' = (a_{11} + \cdots + a_{nn})W(t) = \mathrm{tr}A \cdot W(t) \tag{281}$$

となって、

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s} \tag{282}$$

となる。結論として、$W(t) \equiv 0$ または $\forall t$ について $W(t) \neq 0$ となる。言い換えれば、ある t において $W(t) \neq 0$ ならば、解として得られている $\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$ は $\forall t$ において一次独立である。

以上の考察から、一次独立な n 個の解を $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ とするとき、$\forall t_0$ における任意の初期条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たす解 $\mathbf{x}$ は、$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots c_n\mathbf{x}_n$ と表される。

5.3.2 非同次方程式の場合の 1 つの特殊解の求め方

A を n 次正方行列、$\mathbf{b}$ を n 次の縦ベクトルとして

$$\mathbf{x}(t)' = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{283}$$

が与えられたとする。対応する同次方程式は

$$\mathbf{x}(t)' = A(t)\mathbf{x}(t) \tag{284}$$

である。ここで、(283) の 1 つの特殊解が既知であるとし、それを $\mathbf{x}_\mathrm{p}$ とする。そのほかの解を $\mathbf{x}$ とするときに、$\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{p}$ の微分を計算すると

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{p})' = \mathbf{x}' - \mathbf{x}_\mathrm{p}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b} - (A\mathbf{x}_\mathrm{p} + \mathbf{b}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{p}) \tag{285}$$

となるので、$\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{p}$ は (284) の解である。したがって、(283) の一般解は、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{p} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n, \\ \mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_n \quad \text{は (284) の一次独立な解} \end{aligned} \tag{286}$$

と表される。

それでは、対応する同次方程式の一般解を用いて、非同次方程式の特殊解を求める方法である Lagrange の「定数変化法」について述べる。(284) の 1 次独立な解を既知とし、$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ とする。(283) の解を

$$\mathbf{x}_\mathrm{p} = c_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n(t)\mathbf{x}_n(t) = X(t)\mathbf{c}(t) \tag{287}$$

とおくのである。ただし、

$$X(t) = (\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)), \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \tag{288}$$

である。$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ は (284) の解であるから

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX \tag{289}$$

である。このとき、

$$\mathbf{x}'_\mathrm{p} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\mathbf{c} + X\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = AX\mathbf{c} + X\mathbf{c}' \tag{290}$$

である。一方、$\mathbf{x}'_\mathrm{p}$ について、(283) の右辺は $A\mathbf{x}_\mathrm{p} + \mathbf{b}$ に等しい。これが (290) に等しいのであるから、

$$AX\mathbf{c} + X\mathbf{c}' = A\mathbf{x}_\mathrm{p} + \mathbf{b} \tag{291}$$

が得られる。すなわち

$$\begin{aligned} X\mathbf{c}' &= \mathbf{b}, \\ \therefore \quad \mathbf{c}' &= X^{-1}\mathbf{b}, \quad (X \text{ は } \mathbf{x}_n \text{ の一次独立性から正則行列}) \\ \mathbf{c} &= \int X(t)^{-1}\mathbf{b}(t)\mathrm{d}t, \\ \therefore \quad \mathbf{x}_\mathrm{p} &= X(t) \cdot \int^t X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{292}$$

となって、特殊解が求められた。それゆえ、(283) の一般解は

$$\mathbf{x} = X(t)\int^t X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\mathrm{d}s + X(t) \cdot \mathbf{c} \tag{293}$$

となる。ただし

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{294}$$

である。

5.3.3　定数係数同次線形常微分方程式系の基本解

順序が逆になった感があるが、次に同次方程式の基本解をまとめておく。この節では

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (A \text{ は } t \text{ に依存しないとする}) \tag{295}$$

の形の定数係数同次方程式系を取り扱う。

解の形として

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{q}, \quad (\text{ただし } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}; \quad t \text{ に無関係}) \tag{296}$$

の形を仮定して (295) に代入すると、

$$\mathbf{x}' = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x} \tag{297}$$

であるから

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{298}$$

となる。すなわち、λ が行列 A の固有値ならば、$e^{\lambda t}\mathbf{q}$ は 1 つの解を与える。これを再度 (295) に代入すると

$$Ae^{\lambda t}\mathbf{q} = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{q} \quad \text{すなわち} \quad A\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q} \tag{299}$$

となるので、$\mathbf{q}$ は固有値 λ に属する固有ベクトルということになる。固有値・固有ベクトルの性質に応じて解の構造が異なる。それを、以下に、場合分けして一通り示すこととする。

1. $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が相異なる実固有値の場合
   この場合、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n$ は 1 次独立である。基本解は
   $$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{x}_n = e^{\lambda t}\mathbf{q}_n \tag{300}$$
   で与えられる。
2. λ が複素固有値の場合 $(\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0)$
   対応する固有ベクトル $\mathbf{q}$ が
   $$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + i\mathbf{q}_2, \quad (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{R}^n, \text{実ベクトル}) \tag{301}$$

であるとする。解は

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}\mathbf{q} &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{q}_1 + i\mathbf{q}_2) \\ &= e^{\alpha t}(\mathbf{q}_1\cos\beta t - \mathbf{q}_2\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(\mathbf{q}_1\sin\beta t + \mathbf{q}_2\cos\beta t) \end{aligned} \tag{302}$$

と与えられる。実数の解は

$$\mathbf{x}_{\mathrm{R}} = e^{\alpha t}(\cos\beta t\cdot\mathbf{q}_1 - \sin\beta t\cdot\mathbf{q}_2) \tag{303}$$

$$\mathbf{x}_{\mathrm{I}} = e^{\alpha t}(\cos\beta t\cdot\mathbf{q}_2 + \sin\beta t\cdot\mathbf{q}_1) \tag{304}$$

となる。

3. 1 つの固有値 $\lambda(\in\mathbf{R})$ が固有方程式の重解であるが、それに対応し 2 つの 1 次独立な固有ベクトル $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ がある場合
固有値が重解の場合でも、以前の高階常微分方程式とは若干異なる場合である。すなわち、1 次独立な固有ベクトルが重複度と同じく存在するような場合である。

$$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{x}_2 = e^{\lambda t}\mathbf{q}_2 \tag{305}$$

は一次独立な解を与える。

4. A が対角化できず、Jordan 標準型で表される場合
行列 A に対して、ユニタリー行列 P を用いて変形した際に、

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_m(\lambda) \end{pmatrix} \tag{306}$$

の形になる場合である。もちろん、J は Jordan の標準型であり、

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{307}$$

である。A が (307) で表される場合についてまとめておく（ただし A は r 次の正方行列とする）。狭義の固有ベクトルはただ一つで、それを $\mathbf{q}_1$ とする。また、位数

l の広義の固有ベクトルを $\mathbf{q}_l$ とする。

$$\begin{aligned} (A-\lambda)\mathbf{q}_1 &= \mathbf{0} \\ (A-\lambda)\mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_1 \\ &\vdots \\ (A-\lambda)\mathbf{q}_r &= \mathbf{q}_{r-1} \end{aligned} \tag{308}$$

となることが確認できる。線形代数学で学んだように、$\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_r$ は一次独立である。ここで、

$$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{q}_1 \tag{309}$$

は 1 つの解を与える。次に、

$$\mathbf{x}_2 = te^{\lambda t}\mathbf{q}_1 + e^{\lambda t}\mathbf{q}_2 \tag{310}$$

も解である。なぜなら

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2' &= e^{\lambda t}\mathbf{q}_1 + \lambda te^{\lambda t}\mathbf{q}_1 + \lambda e^{\lambda t}\mathbf{q}_2, \\ A\mathbf{x}_2 &= \lambda te^{\lambda t}\mathbf{q}_1 + e^{\lambda t}(\mathbf{q}_1 + \lambda\mathbf{q}_2) \\ \therefore \mathbf{x}_2' &= A\mathbf{x}_2 \end{aligned} \tag{311}$$

だからである。以下同様にして

$$\mathbf{x}_r = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{\lambda t}\mathbf{q}_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}e^{\lambda t}\mathbf{q}_2 + \cdots + e^{\lambda t}\mathbf{q}_r \tag{312}$$

と、一次独立な解の組 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_r$ が得られる。