連続体力学　配付資料　OCW-i

第 13 回　2 次元弾性論の応用

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．2 次元デカルト座標系での問題

１．１　$\chi(x,y)=\frac{1}{2}a_2x^2+b_2xy+\frac{1}{2}c_2y^2$ の場合

この応力関数は前回の講義資料の(18)式を満足し，前回の講義資料の(20)式から応力σ $_{xx}$，σ $_{yy}$，σ $_{xy}$ を求めると，$\sigma_{xx}=c_2$，$\sigma_{yy}=a_2$，$\sigma_{xy}=-b_2$ と定数になるので，各々の定数を無限遠での応力の値 $c_2=\sigma_{xx}^\infty$，$a_2=\sigma_{yy}^\infty$，$b_2=-\sigma_{xy}^\infty$ として与えれば，

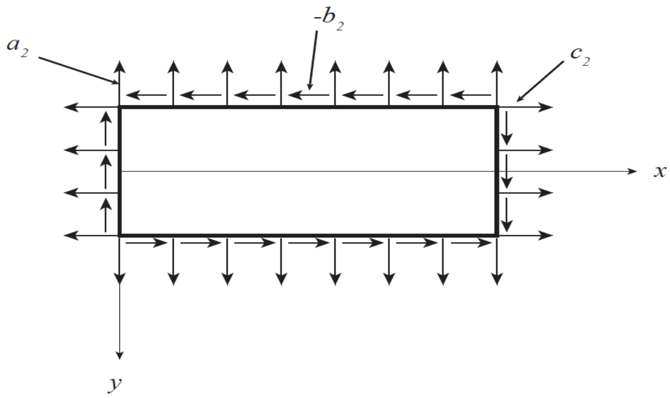


図１　均一な応力場

$$\chi(x,y)=\frac{1}{2}\sigma_{yy}^\infty x^2-\sigma_{xy}^\infty xy+\frac{1}{2}\sigma_{xx}^\infty y^2$$

となり，均一な応力場 $(\sigma_{xx}=\sigma_{xx}^\infty,\ \sigma_{yy}=\sigma_{yy}^\infty,\ \sigma_{xy}=\sigma_{xy}^\infty)$ の応力関数を表していることがわかる（図１参照）．

１．２　$\chi(x,y)=\frac{a_3}{6}x^3+\frac{b_3}{2}x^2y+\frac{c_3}{2}xy^2+\frac{d_3}{6}y^3$ の場合

この応力関数も前回の講義資料の(18)式を満足し，前回の講義資料の(20)式から応力σ $_{xx}$，σ $_{yy}$，σ $_{xy}$ を求めると，$\sigma_{xx}=c_3x+d_3y$，$\sigma_{yy}=a_3x+b_3y$，$\sigma_{xy}=-b_3x-c_3y$ となるので，$a_3=b_3=c_3=0$ の場合は，

$$\sigma_{xx}=d_3y,\quad \sigma_{yy}=0,\quad \sigma_{xy}=0$$

となり，梁の単純曲げの解を表している（図２参照）．

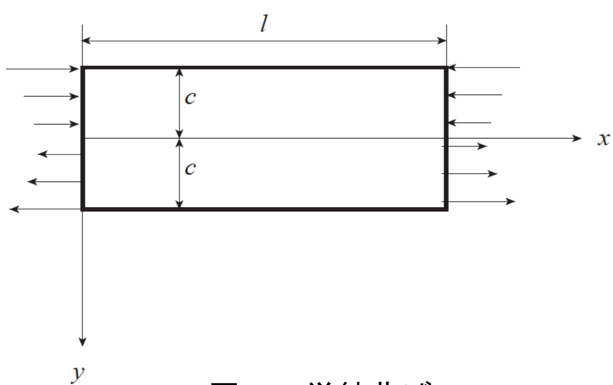
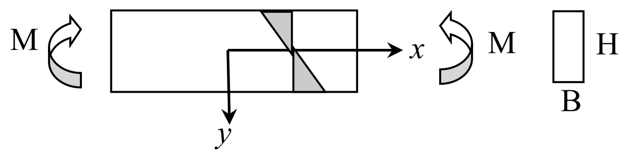


図２　単純曲げ

ここで，定数 d_3 を外部から負荷された曲げモーメント M を使って表すために（図３参照），任意断面のモーメントが曲げモーメント M と釣り合っていることを使うと，

$$M=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}B\sigma_{xx}y\,dy=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}B(d_3y)y\,dy=d_3\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}By^2dy=d_3I$$



$$\therefore d_3=\frac{M}{I}\qquad\left(I=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}By^2dy=\frac{BH^3}{12}\right)$$

図３　外部の曲げモーメントとの釣り合い

となって，定数 d_3 を M で表すことができる．なお，上式中の I は断面 2 次モーメントである．この d_3 を元の式に代入すれば，

$$\chi(x,y)=\frac{M}{6I}y^3$$

となり，これが単純曲げの応力関数を表していることがわかる．

１．３　$\chi(x,y)=\frac{a_4}{12}x^4+\frac{b_4}{6}x^3y+\frac{c_4}{2}x^2y^2+\frac{d_4}{6}xy^3+\frac{e_4}{12}x^4$ の場合

　この応力関数が前回の講義資料の(18)式を満足するためには，定数の間に，$a_4+e_4+2c_4=0$ の関係が成り立たなければならない(すなわち，この応力関数を(18)式に代入すると，この関係が得られる)．この関係の特別な場合として，$a_4=b_4=c_4=e_4=0$ とすると，応力関数は，

$$\chi(x,y)=\frac{d_4}{6}xy^3$$

となる．これから応力成分を求めると，

$$\sigma_{xx}=d_4xy,\quad \sigma_{yy}=0,\quad \sigma_{xy}=-\frac{d_4}{2}y^2$$

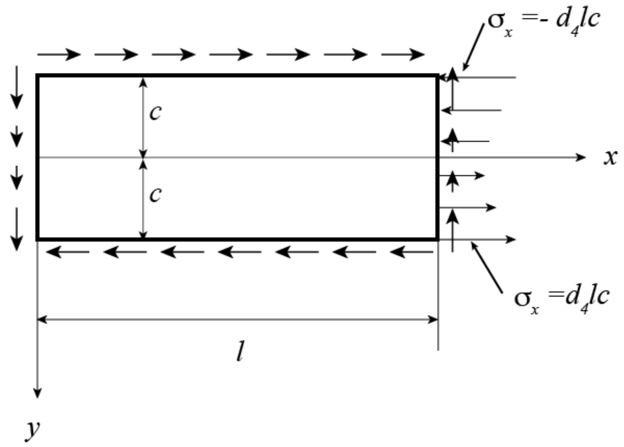


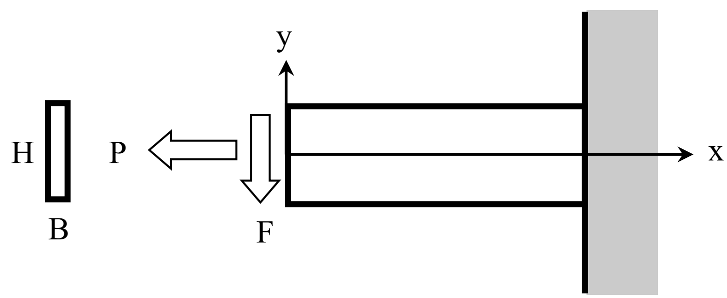
図４　複雑な応力分布

となるので，$d_4>0$ であれば，図４のような複雑な応力分布を表している．

　このように，問題に応じて，次数を上げたり，種々の解を組み合わせたりして，有用な結果を導くことができる．

＜演習１＞

　右図の片持ち梁（幅Ｂ，高さＨ）に，x 軸方向の軸力 P と y 軸方向のせん断力 F を加える場合を考える．これらの力は，左端面上に均一に作用しているものと見なす．この応力



状態を x 軸方向の軸力が掛かった状態と，y 軸方向のせん断力が掛かった状態の和だと考えると，応力関数も，それら２つの応力関数の足し合わせとすることができる．そこで，応力関数を

$$\chi(x,y)=\frac{a}{2}y^2+bxy+\frac{c}{6}xy^3$$

とし，境界条件には，

① x=0 において，$P=B\int_{-H/2}^{H/2}(\sigma_{xx})_{x=0}dy$，$F=B\int_{-H/2}^{H/2}(\sigma_{xy})_{x=0}dy$

② y=±H/2 において，$\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0$

を用いて解け．

２．2 次元極座標での問題

２．１ 2 次元極座標での基礎式

問題によっては，2 次元極座標を使って解くと，非常に簡単に問題を解くことができる場合がある．そこで，2 次元極座標系における問題も．いくつか例示したいのであるが，そのための基礎式を導出していると，講義 1 回分くらいの分量になるので(あるいは，導出そのものは繰り返しになるので)，ここでは，基礎式の結果だけを示す．

①デカルト座標(x,y)と 2 次元極座標（r, θ）との変換関係は，

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=x^2+y^2\\ \theta=tan^{-1}\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

②応力成分とひずみ成分

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{rr}\\ \varepsilon_{rr}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}\sigma_{xx}\\ \varepsilon_{xx}\end{matrix}\right\}\cos^2\theta+\left.\begin{matrix}\sigma_{yy}\\ \varepsilon_{yy}\end{matrix}\right\}sin^2\theta+\left.\begin{matrix}2\sigma_{xy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{matrix}\right\}sin\theta\cos\theta$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}\sigma_{xx}\\ \varepsilon_{xx}\end{matrix}\right\}sin^2\theta+\left.\begin{matrix}\sigma_{yy}\\ \varepsilon_{yy}\end{matrix}\right\}\cos^2\theta-\left.\begin{matrix}2\sigma_{xy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{matrix}\right\}sin\theta\cos\theta$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{r\theta}\\ \varepsilon_{r\theta}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}(\sigma_{yy}-\sigma_{xx})\\ (\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xx})\end{matrix}\right\}sin\theta\cos\theta+\left.\begin{matrix}\sigma_{xy}\\ \varepsilon_{xy}\end{matrix}\right\}(\cos^2\theta-sin^2\theta)$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{xx}\\ \varepsilon_{xx}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}\sigma_{rr}\\ \varepsilon_{rr}\end{matrix}\right\}\cos^2\theta+\left.\begin{matrix}\sigma_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{matrix}\right\}sin^2\theta-\left.\begin{matrix}2\sigma_{r\theta}\\ 2\varepsilon_{r\theta}\end{matrix}\right\}sin\theta\cos\theta$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{yy}\\ \varepsilon_{yy}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}\sigma_{rr}\\ \varepsilon_{rr}\end{matrix}\right\}sin^2\theta+\left.\begin{matrix}\sigma_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{matrix}\right\}\cos^2\theta+\left.\begin{matrix}2\sigma_{r\theta}\\ 2\varepsilon_{r\theta}\end{matrix}\right\}sin\theta\cos\theta$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{xy}\\ \varepsilon_{xy}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})\\ (\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\theta\theta})\end{matrix}\right\}sin\theta\cos\theta+\left.\begin{matrix}\sigma_{r\theta}\\ \varepsilon_{r\theta}\end{matrix}\right\}(\cos^2\theta-sin^2\theta)$$

③　変位成分

$$\begin{cases} u = u_r\cos\theta - u_\theta sin\theta \\ v = u_r sin\theta + u_\theta\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_r = u\cos\theta + v sin\theta \\ u_\theta = -u sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

④構成方程式

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda e' + 2\mu\varepsilon_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda e' + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \qquad (e' = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{1}{2\mu}\left[\dfrac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\sigma_{rr} - \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma_{\theta\theta}\right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{2\mu}\left[\dfrac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\sigma_{\theta\theta} - \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma_{rr}\right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2\mu}\sigma_{r\theta} \end{cases}$$

⑤変位とひずみの関係

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \end{cases}$$

⑤応力の平衡条件式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \\ \dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \end{cases}$$

⑥応力関数と応力成分

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\chi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2\chi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\theta} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\chi}{\partial\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\chi}{\partial\theta}\right) \end{cases}$$

⑦応力関数

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\chi(r,\theta) = 0$$

$$\therefore (\nabla')^2(\nabla')^2\chi(r,\theta) = 0$$

連続体力学　配付資料　OCW-i

２．２ 中心対称問題

θ を含まない r のみの関数で応力関数 χ(r)が与えられていると，⑦の式より，

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\chi(r)=0$$

となる．あるいは，微分演算子を開いて，

$$\left(\frac{d^4}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\right)\chi(r)=0$$

となる．r = e^p なる変数変換を行えば，

$$\frac{d^4\chi}{dp^4}-4\frac{d^3\chi}{dp^3}+4\frac{d^2\chi}{dp^2}=0$$

となり，これは同次定係数線型微分方程式なので，特性方程式の根を求めると，０（２重根）と２（２重根）が得られる．したがって，一般解は，

$$\chi=Ae^{2p}+Bpe^{2p}+Cp+D$$

変数をｒに戻して，

$$\chi(r)=Ar^2+Br^2\log r+C\log r+D$$

となる．これが，中心対称問題のエアリーの応力関数の一般形である．この応力関数から応力成分を計算すると，

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=\dfrac{1}{r}\dfrac{d\chi}{dr}=2A+B(2\log r+1)+\dfrac{C}{r^2}\\ \sigma_{\theta\theta}=\dfrac{d^2\chi}{dr^2}=2A+B(2\log r+3)-\dfrac{C}{r^2}\\ \sigma_{r\theta}=0\end{cases}$$

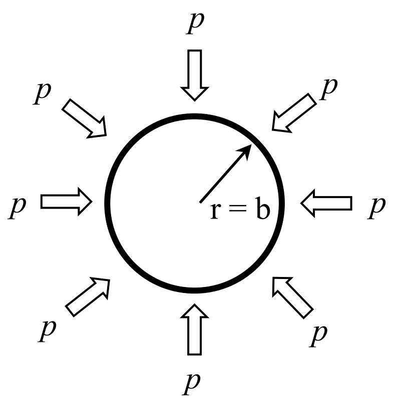
となる．後は，境界条件を満足するように，定数 A,B,C を決めればよい．

＜演習２＞　一様な外圧 p を受ける円筒（半径 r ＝ b）内の応力状態を求めよ．境界条件は，

① r = b で σ_{rr} = - p

② r = 0 で σ_{rr} と $\sigma_{\theta\theta}$ は有限である

となる．



２．３ 先端に集中力が作用するくさびの問題

ここでは，$\chi(r,\theta) = Ar\theta sin\theta$を考える．この応力関数は，θに関して偶関数（θとsin θの積だから）となるので，図5に示すようなθ=0なる軸（図中では，x軸）に対称な問題に適する応力関数になる．応力成分を求めてみると，

$$\sigma_{rr} = 2A\frac{\cos\theta}{r},\quad \sigma_{\theta\theta} = 0,\quad \sigma_{r\theta} = 0$$

となる.右図の境界条件は,以下のようになっているので,

① $\theta=\alpha$ で $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{r\theta}=0$

② $\theta=-\alpha$ で $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{r\theta}=0$

これらの境界条件を応力の成分に代入しても満足することがわかる．

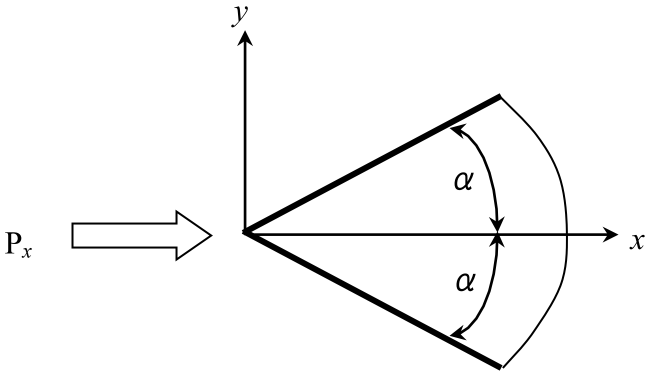


図5　集中力が作用するくさび

くさびの先端近傍の半径 r 角度 dθ の微小体積素片（図6参照）の力の釣り合いを考えると，この微小体積素片は，内部応力 σ_{rr} によって左側に押され，集中力 P_x で右側に押されて，その両者が釣り合っているので，x 方向，y 方向の力の釣り合いを考えると，

$$\begin{cases} -\int_{-\alpha}^{\alpha}\sigma_{rr}sin\theta rd\theta = -2A\int_{-\alpha}^{\alpha}sin\theta\cos\theta = 0 \\ -\int_{-\alpha}^{\alpha}\sigma_{rr}\cos\theta rd\theta = -2A\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2\theta = P_x \end{cases}$$

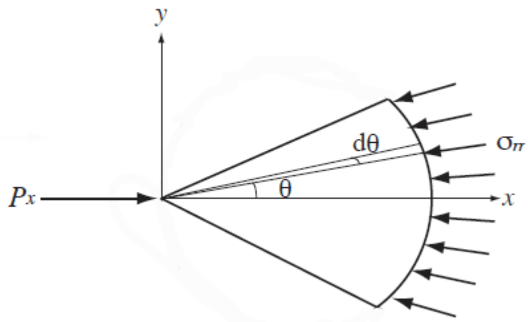


図6　頂点付近の微小体積要素

となる．第１式は恒等的に成り立ち，第２式から，定数Aが

$$A = -\frac{P_x}{2\alpha + sin2\alpha}$$

となるので，集中力 P_x が作用するくさび内の応力分布は，

$$\sigma_{rr} = -\frac{P_x}{2\alpha + sin2\alpha}\cdot\frac{\cos\theta}{r},\quad \sigma_{\theta\theta} = 0,\quad \sigma_{r\theta} = 0$$

となる．

同様の計算を図7のように，y 軸方向から集中力 P_y が作用する場合にも計算できて，結果だけ示すと，

$$\sigma_{rr} = \frac{P_y}{2\alpha - sin2\alpha}\cdot\frac{sin\theta}{r},\quad \sigma_{\theta\theta} = 0,\quad \sigma_{r\theta} = 0$$

となる．

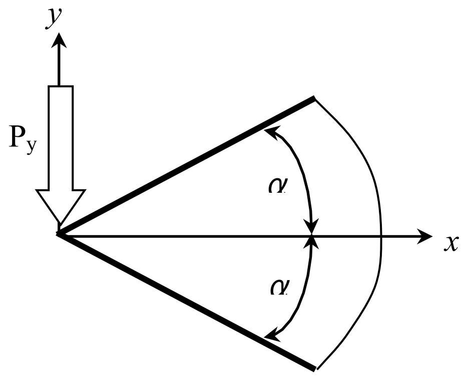


図7　もう一つの集中力が作用する
くさび問題

　このくさびの問題は，次のように考えるとかなり有用な式になる．すなわち，角度αをπ／２にすると，半無限体に集中力P_xおよびP_yが作用する場合（図10参照）の解を表すことになり．

$$(P_x\text{の場合})\quad \sigma_{rr}=-\frac{2P_x}{\pi}\cdot\frac{\cos\theta}{r},\quad \sigma_{\theta\theta}=0,\quad \sigma_{r\theta}=0$$

$$(P_y\text{の場合})\quad \sigma_{rr}=\frac{2P_y}{\pi}\cdot\frac{sin\theta}{r},\quad \sigma_{\theta\theta}=0,\quad \sigma_{r\theta}=0$$

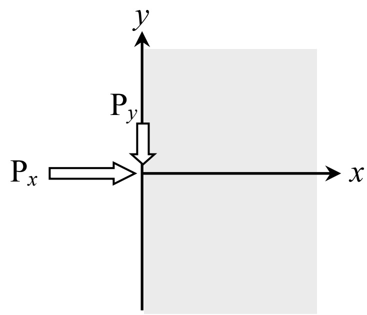


図 8　半無限体への集中力問題