

第 12 回 2 次元弾性論の基礎

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. はじめに

応力，ひずみ，構成方程式と概念的な準備を進めてきたが，今回と次回の講義で，エアリーの応力関数を説明することにより，これらの概念が一つに統合され，弾性応力場を求めると言うことが，どのような操作で行われるかを理解できるであろう。

2. 平面ひずみと平面応力

実際の 3 次元問題の中には，2 次元問題として近似できるものがあり，そのようにすると，取り扱いがかなり簡単になる。この近似の形式として，平面ひずみ問題と平面応力問題の 2 種類がある。

2. 1 平面ひずみ問題

図 1 に示すように， xy 方向に広がる非常に厚い板に， xy 面内の力だけが作用している場合， z 方向の変形が拘束されるので（実際には， z 方向の変位 w が 0 と見なせるので）， ε_{11} ， ε_{22} ， ε_{12} の値は 0 にはならないが， $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = 0$ と見なせる（なぜならば， ε_{33} ， ε_{31} ， ε_{23} は，全て，変位 w の変位勾配から計算されるため）という近似のこと。

前回の演習問題 1 の⑤より，

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \{\sigma_{22} + \sigma_{33}\}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \{\sigma_{33} + \sigma_{11}\}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu \{\sigma_{11} + \sigma_{22}\}) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G} \sigma_{31} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

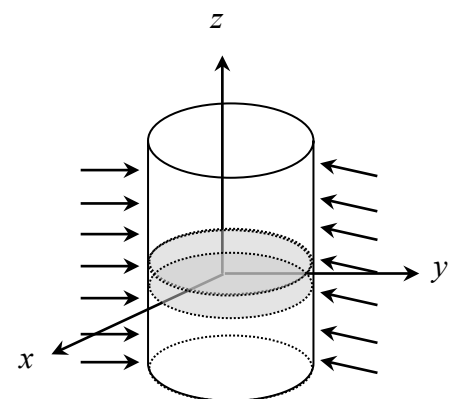


図 1 平面ひずみ状態

という 3 次元弾性論の構成方程式が得られるので， $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = 0$ という条件を入れて，

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \{\sigma_{22} + \sigma_{33}\}) \xrightarrow{\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\{1 - \nu^2\} \sigma_{11} - \nu \{1 + \nu\} \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \{\sigma_{33} + \sigma_{11}\}) \xrightarrow{\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})} \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\{1 - \nu^2\} \sigma_{22} - \nu \{1 + \nu\} \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu \{\sigma_{11} + \sigma_{22}\}) = 0 \rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (2_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G} \sigma_{23} = 0 && \rightarrow \sigma_{23} = 0 \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G} \sigma_{31} = 0 && \rightarrow \sigma_{31} = 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (2_2)$$

これより、 $\varepsilon_{33} = 0$ となるためには、 $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ という応力が存在する。すなわち、変形は 2 次元的 (z 方向の変位 w が 0 なので) であるが、応力状態は 3 次元的になる。このような応力状態のことを、変形が 2 次元的であるということから、平面ひずみ状態と言い、平面ひずみ状態の問題を平面ひずみ問題と言う。

2. 2 平面応力問題

図 2 に示すように、 xy 方向に広がる非常に薄い板に、 xy 面内の力だけが作用している場合、 z 方向は自由に変形できるので (具体的には、 z 方向の面力が 0 となるまで変形するので)、 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{12} の値は 0 にはならないが、 $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$ と見なせる (なぜならば、 z 方向の面力ベクトル σ_z は、応力テンソルの講義で示したように、 $\sigma_z = i\sigma_{31} + j\sigma_{32} + k\sigma_{33}$ と表されるので、 σ_{33} 、 σ_{31} 、 σ_{23} が、全て 0 でないと、表面を z 方向に変位させる力が残ってしまうので) という近似のこと。

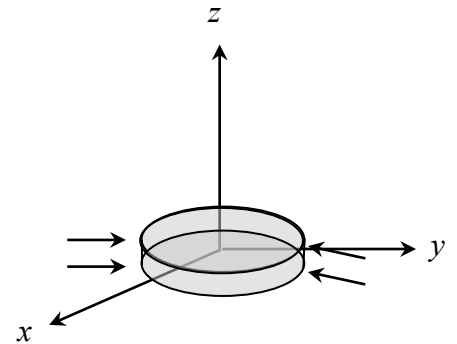


図 2 平面応力状態

(1) 式に、 $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$ という条件を入れて、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\{\sigma_{22} + \sigma_{33}\}) \xrightarrow{\sigma_{33}=0} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\{\sigma_{33} + \sigma_{11}\}) \xrightarrow{\sigma_{33}=0} \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} (0 - \nu\{\sigma_{11} + \sigma_{22}\}) \rightarrow \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G} \times 0 && \rightarrow \varepsilon_{23} = 0 \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G} \times 0 && \rightarrow \varepsilon_{31} = 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

これより、 $\sigma_{33} = 0$ となるためには、 $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$ というひずみが存在する。すなわち、応力状態は 2 次元的 (σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{12} しかない) であるが、変形は 3 次元的になる。このような変形状態のことを、応力が 2 次元的であるということから、平面応力状態といい、平面応力状態の問題を平面応力問題と言う。

3. エアリーの応力関数

ここでは、まず、平面ひずみ問題として、以下の議論を進める。この場合の構成方程式は、構成方程式の講義資料の(34)式より、

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda e' + 2\mu e_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda e' + 2\mu e_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2\mu e_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

となる。ここで、2次元問題における体積ひずみを $e' = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ とした。また、平衡条件式と適合条件式は、

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 f_x , f_y は体積力の x 方向, y 方向成分である。これらの方程式を全て満足し、かつ、境界条件も満足するようにして、応力とひずみの成分を x, y の関数として決定しなければならない。

そこで、Airy の応力関数 $\chi(x, y)$ を次のように導入する。まず、物体力 f_x , f_y が、あるポテンシャル関数 $\Omega(x, y)$ を用いて、次のように表されているとすれば、

$$\begin{cases} f_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

すると、平衡条件式は次のように表される。

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{xx} - \Omega)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} - \Omega)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{cases} \sigma_{xx} - \Omega = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} - \Omega = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (5)$$

と置いて、この $\chi(x, y)$ を Airy の応力関数と言う。

逆に、このような関係式が成り立つ $\chi(x, y)$ があれば、そこから求められる応力やひず

みの成分は、自動的に平衡条件式を満足していることが、(5)式を(2)式の第1式と第2式に代入すればわかる。

次に、この応力関数 $\chi(x, y)$ から求めた応力が適合条件式を満足するためには、どのような条件を応力関数 $\chi(x, y)$ も課せばよいかを考える。(1)式を書き直すと、

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{xx} \end{cases} \quad (6)$$

これを連立方程式と見なして、 ε_{xx} と ε_{yy} について解くと、

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{yy} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{xx} \right) \end{cases} \quad (7)$$

これに加えて、

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} \quad (8)$$

も必要となる。なお、ここで求めた(7)式と(8)式は、弾性体の構成方程式の講義資料における(40)式中の $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0$ としただけでは得られない。これは、前回の講義資料は3次元弾性論の一般論として記述しているので、 ε_{kk} と σ_{kk} の関係を求めるのに、 σ_{zz} や ε_{zz} を数えているが、今回の(7)式と(8)式は、2次元弾性論を前提として式を導出してきたので、3次元弾性論の式とは係数が合わないからである。

(7)式と(8)式を適合条件式に代入するために、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 2 \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \therefore 2 \cdot \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) \\ \therefore 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right) - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

この式から $\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$ を消去するために、(5)式の第1式と第2式を、各々、 x と y で2回偏微分して、各々加えると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \therefore \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2}\end{aligned}$$

一方, (5)式の第3式を x と y で1回偏微分すると,

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

となるので, これらの式から $\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2}$ を消去すると,

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0$$

となるので,

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) + (\nabla')^2 \Omega \quad (10)$$

ここで, $\nabla' = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$, $(\nabla')^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ と定義して, 3次元の場合のナブラの定義とは区別した. (9)式と(10)式を等値して,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right) - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) &= - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) + (\nabla')^2 \Omega \\ \therefore \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right) + \left(1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) &= (\nabla')^2 \Omega \quad (11)\end{aligned}$$

$1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}$ なので, (11)式を整理すると,

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right] = (\nabla')^2 \Omega \quad (12)$$

すなわち,

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} (\nabla')^2 [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] = (\nabla')^2 \Omega \quad (13)$$

これより,

$$\begin{aligned}
 (\nabla')^2 [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] &= \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (\nabla')^2 \Omega = \frac{1}{1-\nu} (\nabla')^2 \Omega \\
 (\nabla')^2 [\sigma_{xx} - \Omega + \sigma_{yy} - \Omega] &= \frac{2(\lambda + \mu) - 2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} (\nabla')^2 \Omega = \frac{1 - 2(1-\nu)}{1-\nu} (\nabla')^2 \Omega \\
 (\nabla')^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi &= \frac{-2\mu}{\lambda + 2\mu} (\nabla')^2 \Omega = \frac{-1 + 2\nu}{1-\nu} (\nabla')^2 \Omega \\
 \therefore (\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi &= \frac{-2\mu}{\lambda + 2\mu} (\nabla')^2 \Omega = \frac{-1 + 2\nu}{1-\nu} (\nabla')^2 \Omega \quad (14)
 \end{aligned}$$

これが、平面ひずみ問題におけるエアリーの応力関数 $\chi(x,y)$ が満たすべき偏微分方程式になる。

これに対応して、平面応力におけるエアリーの応力関数 $\chi(x,y)$ が満たすべき偏微分方程式は、 $(\lambda, \nu) \rightarrow (\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu), \nu)$ の置き換えをすればいいので、

$$\begin{aligned}
 (\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi &= \frac{-2\mu}{\lambda^* + 2\mu} (\nabla')^2 \Omega \\
 &= \frac{-2\mu}{\left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right) + 2\mu} (\nabla')^2 \Omega \\
 &= \frac{-2\mu}{2\lambda\mu + 2\mu(\lambda + 2\mu)} (\nabla')^2 \Omega \\
 &= \frac{-2\mu(\lambda + 2\mu)}{2\lambda\mu + 2\mu(\lambda + 2\mu)} (\nabla')^2 \Omega \\
 &= \frac{-(\lambda + 2\mu)}{\lambda + (\lambda + 2\mu)} (\nabla')^2 \Omega \\
 &= \frac{-(\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} (\nabla')^2 \Omega \quad (15)
 \end{aligned}$$

すなわち、平面応力の場合は、

$$(\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi = \frac{-(\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} (\nabla')^2 \Omega \quad (16)$$

となり、また、(16)式中のラメの定数で書かれた分母分子をポアソン比 ν で書き換えると、 $1-\nu = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}$ なので、平面応力の場合は、

$$(\nabla')^2 (\nabla')^2 \chi = -(1-\nu) (\nabla')^2 \Omega \quad (17)$$

としてもよい。

さらに、体積力 f_x と f_y がなければ、 $(\nabla')^2 \Omega = 0$ なので、平面ひずみ問題の(14)式の場合

合も、平面応力問題の(16)式あるいは(17)式も、次式で示した同じ偏微分方程式になる。

$$(\nabla')^2(\nabla')^2\chi=0 \quad (18)$$

$$\therefore \frac{\partial^4\chi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\chi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\chi}{\partial y^4} = 0 \quad (19)$$

この式より、体積力がなければ、応力関数 χ は重調和関数 ($(\nabla')^4\chi(x,y)=0$ となる関数) であることがわかる。また、体積力がなければ、ラメの定数の影響はなくなり、2次元問題における応力分布は材料定数に依存せず、平面ひずみと平面応力の区別もなくなることがわかる。この場合は、各応力成分は、

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} \end{cases} \quad (20)$$

で求められる。このようにして求めた応力はもちろんのこと、それらを(7)、(8)式に代入して得られるひずみの成分も、自動的に平衡条件式や適合条件式を満足する。

以上のことから、2次元弾性論の解法は、重調和関数の内から、境界条件を満足する応力関数 $\chi(x,y)$ を見いだす問題に帰することになる。

演習 1 $\xi(x,y)$ が調和関数である場合、 $(\nabla')^2\xi(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\xi(x,y) = 0$ が成り立つ。

この時、 $\xi(x,y)$, $x\xi(x,y)$, $y\xi(x,y)$, $(x^2+y^2)\xi(x,y)$ が重調和関数であることを示せ。

* 上記の関数の線形結合を作るとエアリーの応力関数として使いうるいろいろな重調和関数が得られるが、こうして得られたものには重複があるので、弾性問題を解くには、都合が悪い。そこで、重複のない重調和関数の一般解がグルサによって求められていて、 z を複素変数とし、 $\phi(z)$, $\psi(z)$ を正則な複素関数とすれば、エアリーの応力関数の一般形は、 $\chi(x,y) = \text{Re}\left[\bar{z}\phi(z) + \int \varphi(z)dz\right]$ と表されることが知られている。