

第 11 回 弾性体の構成方程式

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. 構成方程式はなぜ必要なのか？

これまで、応力テンソル、ひずみテンソルの話をしてきたが、弾性体の応力状態・変形状態を規定する未知数の数を数えてみると、

未知の変数	応力テンソル	6 個
	ひずみテンソル	6 個
	変位	3 個
	合計	15 個

となる。一方、応力の平衡方程式やひずみの適合方程式など、未知の変数を規定する方程式の数は、

方程式の数	応力の平衡方程式	3 個	$\sigma_{ij,j} = 0$
	ひずみの適合方程式	6 個	$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = 0$
	構成方程式	6 個	$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$
	合計	15 個	

となり、構成方程式がないと、弾性体の変形問題を解くことができないことがわかる。なお、ここで言う構成方程式とは、応力とひずみの関係を表すものである。構成方程式以外は、示強変数（応力）あるいは示量変数（ひずみ）に関する場の量に関わる方程式であるが、構成方程式でこれらの量の関係が規定され、弾性体を構成する物質の物性が反映されることになる。

2. 弾性体の熱力学

弾性体の単位体積の領域に dQ の熱的工作が供給され、応力 σ_{ij} によって $d\varepsilon_{ij}$ なる微小ひずみを与えられた時、この領域の内部エネルギーの変化 dU は、

$$dU = dQ + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1)$$

で与えられる。次に、この可逆過程における温度を T とすると、エントロピーは次式で定義できる。

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (2)$$

これを(1)式に代入すると,

$$dU = TdS + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (3)$$

となり, 内部エネルギーの引数がエントロピー S とひずみ ε_{ij} となっていることがわかる. エントロピーを制御するのは難しいので, ルジャンドル変換によって, 次のヘルムホルツ自由エネルギー F を新たに定義する.

$$F = U - TS \quad (4)$$

すると, ヘルムホルツ自由エネルギーの微小変化 dF は,

$$dF = -SdT + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (5)$$

となる. この2つの熱力学関数を用いて, 断熱過程と等温過程を表すと,

①断熱過程

$dQ=0$ なので, $dS=0$ となり, 内部エネルギーを用いると,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (6)$$

②等温過程

$dT=0$ なので, ヘルムホルツ自由エネルギーを用いると,

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (7)$$

となる.

3. ひずみエネルギー関数

次式の関係が成り立つような, あるスカラー関数 W が存在する時, このスカラー関数 W をひずみエネルギー関数という.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (8)$$

前節の結果から, 断熱過程に対するひずみエネルギー関数 W は内部エネルギー U , 等温過程に対するひずみエネルギー関数はヘルムホルツ自由エネルギー F であることがわかる. なお, どちらの熱力学関数を使った場合でも,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) \quad (9)$$

となっているので,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (10)$$

と言う関係がある.

4. 弾性体の構成方程式の導出

均一正方弾性体の等温過程を考える。通常、基準温度 T_0 からの温度差 ΔT で表現することが多いが、ここでは、簡単のため、基準温度における等温変化とし、 $\Delta T=0$ として導出を進める。等温過程なのでヘルムホルツ自由エネルギー F を用いると、

$$F(T, \varepsilon_{ij}) = K(T_0) + b_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \cdots \quad (11)$$

となる。 $K(T_0)$ は温度にのみ依存する定数項である。 $\varepsilon_{ij}=0$ の時に、 $\sigma_{ij}=0$ となる温度を基準温度にすれば、 $\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$ なので、 $b_{ij}=0$ とならなければならないことがわかる。

また、変形が微小であれば、3 次以上の微小量は無視できるので、

$$F(T, \varepsilon_{ij}) = K(T_0) + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (12)$$

このヘルムホルツ自由エネルギーは、等温過程でのひずみエネルギー関数 W なので、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (13)$$

これが、弾性体の構成方程式である。上式の C_{ijkl} が弾性スティフネステンソルで、4 階テンソルである。等温変化であれば、温度に依存する定数を無視して、

$$F = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (14)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (15)$$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = C_{klij} \quad (16)$$

(14)式より、ひずみエネルギー関数 W は、ひずみに関する正値 2 次形式となっていることがわかる。(15)式が、通常、使われる弾性体の構成方程式である。また、(16)式から C_{ijkl} の添字の内、前の 2 つと後ろの 2 つを交換したものと同じ値を持つことがわかる。さらに、応力とひずみが対称テンソルであることから、

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (17)$$

となることもわかる。

5. 弾性体の構成方程式の表示法

(1) テンソル表示

前節で導出した $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ を一般化 Hooke の法則と言う。一般化 Hooke の法則は、

9 個の式からなる連立 1 次方程式なので、 ε_{kl} について解くと、

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (18)$$

が得られる. この S_{ijkl} を弾性コンプライアンステンソルと呼ぶ. なお, イギリス系の研究者は, C_{ijkl} を elastic constant, S_{ijkl} を elastic modulus と呼ぶことがある. また, 物理量の記号が物理量の名前の最初の文字と反対の関係になっていることに注意せよ, また, あまり見かけないが, テンソルひずみを用いた構成方程式を次のようにマトリックス表示することもできる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2213} & C_{2212} & C_{2221} \\ & & & & \vdots & & & & \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2313} & C_{2312} & C_{2321} \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2113} & C_{2112} & C_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix} \quad (19)$$

合計 $9 \times 9 = 81$ 個の C_{ijkl} 成分があるが, $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ の関係があるので, 独立な成分は 21 個となる.

なお, 弾性スティフネステンソル C_{ijkl} が 4 階テンソルであることは, 次のようにするとわかる. 旧座標系の応力を σ_{ij} , ひずみを ε_{ij} とし, 新座標系の応力を σ'_{ij} , ひずみを ε'_{ij} とすると, 次式が成り立つ.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{kl} = v_{kt} v_{ls} \varepsilon'_{ts} \quad (21)$$

$$\sigma'_{mn} = v_{mi} v_{nj} \sigma_{ij} \quad (22)$$

ここで, (21) 式は, $\varepsilon'_{ts} = v_{tk} v_{sl} \varepsilon_{kl} \rightarrow v_{sl}^{-1} v_{tk}^{-1} \varepsilon'_{ts} = v_{sl}^{-1} v_{tk}^{-1} v_{tk} v_{sl} \varepsilon_{kl} \rightarrow {}^t v_{sl} {}^t v_{tk} \varepsilon'_{ts} = \varepsilon_{kl} \rightarrow v_{ls} v_{kt} \varepsilon'_{ts} = \varepsilon_{kl}$ となることを利用した.

$$\begin{aligned} \sigma'_{mn} &= v_{mi} v_{nj} C_{ijkl} v_{tk} v_{sl} \varepsilon'_{ts} \\ \therefore C'_{mnts} &= v_{mi} v_{nj} v_{tk} v_{sl} C_{ijkl} \end{aligned} \quad (23)$$

これより, 座標変換に関する新旧基底ベクトル間の方向余弦を 4 つかけ算して, 弾性スティフネステンソルが変換されているので, 弾性スティフネステンソルは 4 階テンソルであることがわかる.

(2) マトリックス表示 (工学ひずみ表示)

2 階テンソルである応力 σ_{ij} とひずみ ε_{ij} を, それらが対称テンソルであることを考慮して, 6 次元ベクトルで表示し, それらの関係を 2 階のテンソル C_{mn} で示す表示方法をマトリックス表示という. まず, 応力テンソルとひずみテンソルの成分は, 次のように書き換える.

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_{11} \rightarrow \sigma_1 & \varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_1 \\
 \sigma_{22} \rightarrow \sigma_2 & \varepsilon_{22} \rightarrow \varepsilon_2 \\
 \sigma_{33} \rightarrow \sigma_3 & \varepsilon_{33} \rightarrow \varepsilon_3 \\
 \sigma_{23} = \sigma_{32} \rightarrow \sigma_4 & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_4 \quad (\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}) \\
 \sigma_{31} = \sigma_{13} \rightarrow \sigma_5 & \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_5 \quad (\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{31}) \\
 \sigma_{12} = \sigma_{21} \rightarrow \sigma_6 & \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_6 \quad (\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12})
 \end{array}$$

テンソルひずみでは添字を順次足し合わせるのので、せん断成分については、 ε_{23} も ε_{32} もそれぞれ 1 回ずつ足しあわされるが、ここで示すマトリックス表示では、 ε_4 はマトリックス計算上、1 回しか足しあわされないのので、予め、ひずみの値を 2 倍にしておいてつじつまを合わせるために、 $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\varepsilon_4$ ということにしている。このため、 ε_4 は工学ひずみそのものと同じことになる。本によっては、 $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ を $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ として工学ひずみであることを分かりやすく表示している場合もある。このようにすると、

$$\sigma_m = C_{mn} \varepsilon_n \quad (24)$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (25)$$

と表される。このように、応力テンソル σ_{ij} とひずみテンソル ε_{ij} の対称性(すなわち、独立な成分が 6 個ずつということ)だけを考慮すると、(25)式のように、36 個の独立な C_{mn} 成分を持つが、 $C_{ijkl} = C_{klij}$ 、すなわち、 $C_{mn} = C_{nm}$ という対称性(弾性ひずみエネルギー関数 W がひずみ ε_{ij} の正値 2 次形式 $W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ で表されることによる)も考慮すると、 C_{mn} も対称テンソルとなるため、片側の非対角項がもう一つの非対角項と等しくなり、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Sym.

となって、独立な成分の数は 21 個になる。

同様に、弾性コンプライアンス S_{ijkl} も、

$$\varepsilon_m = S_{mn} \sigma_n \quad (27)$$

というマトリックス表示ができるが、その際は、次の変換を伴うので、注意すること。

$$\begin{cases} S_{ijkl} = S_{mn} & (\text{Both } m \text{ and } n = 1,2,3) \\ S_{ijkl} = \frac{1}{2} S_{mn} & (\text{Either } m \text{ or } n = 4,5,6) \\ S_{ijkl} = \frac{1}{4} S_{mn} & (\text{Both } m \text{ and } n = 4,5,6) \end{cases} \quad (28)$$

このようにする理由は、 ε_{11} と ε_{23} を書き下してから、マトリックス表示に直してみると、このようにしないと数が合わないことから分かる。すなわち、

同じものが 2 つで
てくるから、 S_{16} を
予め、半分にしてお
く

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{1111}\sigma_{11} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1113}\sigma_{13} \\ &+ S_{1121}\sigma_{21} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1123}\sigma_{23} \\ &+ S_{1131}\sigma_{31} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1133}\sigma_{33} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + \frac{1}{2} S_{16}\sigma_6 + \frac{1}{2} S_{15}\sigma_5 \\ &+ \frac{1}{2} S_{16}\sigma_6 + S_{12}\sigma_2 + \frac{1}{2} S_{14}\sigma_4 \\ &+ \frac{1}{2} S_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2} S_{14}\sigma_4 + S_{13}\sigma_3 \end{aligned} \quad (29)$$

同様に、

マトリックス表示
に変換する時に、
ひずみは、半分に
なっている。

さらに、同じもの
が 2 つでてくるか
ら、 S_{46} を予め、1/4
にしておく

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} &= S_{2311}\sigma_{11} + S_{2312}\sigma_{12} + S_{2313}\sigma_{13} \\ &+ S_{2321}\sigma_{21} + S_{2322}\sigma_{22} + S_{2323}\sigma_{23} \\ &+ S_{2331}\sigma_{31} + S_{2332}\sigma_{32} + S_{2333}\sigma_{33} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_4 &= \frac{1}{2} S_{41}\sigma_1 + \frac{1}{4} S_{46}\sigma_6 + \frac{1}{4} S_{45}\sigma_5 \\ &+ \frac{1}{4} S_{46}\sigma_6 + \frac{1}{2} S_{42}\sigma_2 + \frac{1}{4} S_{44}\sigma_4 \\ &+ \frac{1}{4} S_{45}\sigma_5 + \frac{1}{4} S_{44}\sigma_4 + \frac{1}{2} S_{43}\sigma_3 \end{aligned} \quad (30)$$

S_{46} も、2 回出てくるので、予め、1/2 にするが、 ε_4 が、既に、マトリックス表示の段階で半分になっているので、 $1/2 \times 1/2 = 1/4$ となる。

このように、弾性体の構成方程式を一般的に表すことができるが、実際には、結晶の対称性を考慮すると、それぞれの弾性スティフネステンソルの要素間に、ある代数関係が生じて、独立な成分の数が、結晶系によって少なくなってくる。そして、等方体の構成方程式では、独立な弾性スティフネステンソルは C_{11} ($=C_{1111}$) と C_{12} ($=C_{1122}$)

6. 等方体の構成方程式

等方体の構成方程式は、次式のようにマトリックス表示できる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (31)$$

これより、このマトリックス表示では、左上の3行3列成分の部分と、右下の対角成分の2つの部分に分けることができるが、これは、垂直応力によって垂直ひずみだけ生成し、せん断応力によってせん断ひずみだけが生成することを意味し、それ故に、垂直ひずみの部分とせん断ひずみの部分を独立に扱えることがわかる。逆に言うと、(31)式で0になっている3行3列の右上の部分と左下の部分が0でなくなると、垂直応力を負荷すると垂直ひずみだけでなく、せん断ひずみが発生したりすることが起きる。このような現象をカップリング効果と言って、繊維強化複合材料(斜交積層材料)で見られる現象である。

さて、話を戻して、新しい量として、 $\mu = \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})$ 、 $\lambda = C_{12}$ というラメの定数を

導入すると、 $C_{11} = \lambda + 2\mu$ 、 $C_{12} = \lambda$ 、 $\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) = \mu$ となるので、(31)式は、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (32)$$

すなわち、これを個別に分けて書くと、

$$\begin{cases} \sigma_1 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \sigma_2 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_3 + \varepsilon_1) \\ \sigma_3 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \sigma_4 = \mu\varepsilon_4 \Leftrightarrow \sigma_4 = \mu\gamma_{23} \\ \sigma_5 = \mu\varepsilon_5 \Leftrightarrow \sigma_5 = \mu\gamma_{31} \\ \sigma_6 = \mu\varepsilon_6 \Leftrightarrow \sigma_6 = \mu\gamma_{12} \end{cases} \quad (33)$$

したがって、テンソルひずみに直すと、

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) \\ \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} = 2\mu\varepsilon_{31} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \end{cases} \quad (34)$$

ここで、体積ひずみを $e = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ とすると、(34)式は、次式のようにまとめることができる。

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (35)$$

この式を ε_{ij} で解けば、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \lambda e \delta_{ij}) \quad (36)$$

となる。さらに、(34)式の垂直応力成分を全て足し合わせると、

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} &= (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk} \\ &= (3\lambda + 2\mu)e \end{aligned} \quad (37)$$

となるので、

$$e = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \quad (38)$$

これを(36)式に代入すると、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (39)$$

これを個別に書くと、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \{ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \} \right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{22} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{22} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \{ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \{ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \} \right) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{31} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

これは、丁度、(34)式と逆の書き方になっている。

演習1 弾性論の専門書では、伝統的にラメの定数 λ , μ を用いて構成方程式が書かれる場合が多いが、材料科学の分野では、物性定数としてのヤング率 E , ポアソン比 ν , 剛性率 (横弾性率, せん断弾性率) G , 体積弾性率 K を議論することの方が多。ここでは、これらの関係を求めてから、構成方程式を書き換えることにする。

- ①ヤング率 E , ポアソン比 ν , 剛性率 G , 体積弾性率 K を、それぞれ、ラメの定数 λ , μ を用いて表せ。

ヤング率: σ_{11} を与えた時に生じたひずみ ε_{11} を測定して, $E = \sigma_{11} / \varepsilon_{11}$

ポアソン比: σ_{11} を与えた時に生じたひずみ ε_{11} と ε_{22} を測定して, $\nu = -\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}$

剛性率 G : σ_{12} を与えた時に生じた $\gamma_{12} (=2\varepsilon_{12})$ を測定して, $G = \sigma_{12} / \gamma_{12}$

体積弾性率 K : $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P$ を与えた時に生じた体積ひずみ $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ を測定して, $K = -P/e$

- ②等方体では、独立な弾性スティフネステンソルの数は2個なので、ヤング率 E , ポアソン比 ν , 剛性率 G , 体積弾性率 K の間には、2つの関係式がある。まず、ラメの定数 λ を剛性率 G とポアソン比 ν を用いて表せ。

- ③次に、剛性率 G とポアソン比 ν が既知であるとして、ヤング率 E と体積弾性率 K を求める関係式を導出せよ。

- ④(34)式からラメの定数を消去して、剛性率 G とポアソン比 ν で表した構成方程式を求めよ。さらに、この結果の内、垂直応力成分の式だけを、ヤング率 E とポアソン比 ν で表した構成方程式に書き換えよ。

- ⑤(40)式からラメの定数を消去して、剛性率 G とポアソン比 ν で表した構成方程式を求めよ。さらに、この結果の内、垂直応力成分の式だけを、ヤング率 E とポアソン比 ν で表した構成方程式に書き換えよ。

演習2 デカルト座標系での応力状態が $[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と表されるような場合、

その応力状態は純粋せん断応力状態にあると言う。この場合の主応力を求め、座標軸を主応力の方向に回転させると、どのような応力状態になっているかを示せ。