

第 13 回 ひずみテンソル(2)

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. 任意の方向のひずみベクトルの計算

物体内の任意の点 P から, 任意の方向 n を向く線素 PQ を考える. その方向余弦を (v_{nX}, v_{nY}, v_{nZ}) とし, 線素の長さを dr とする. 図 1 に示すように, 物体の微小変形(すなわち, $E_{ij} = e_{ij} = \varepsilon_{ij}$)に伴って変形変位 du によって, 線素 PQ' になった場合を考える. この時の du は次式で表される.

$$du = i du + j dv + k dw \quad (1)$$

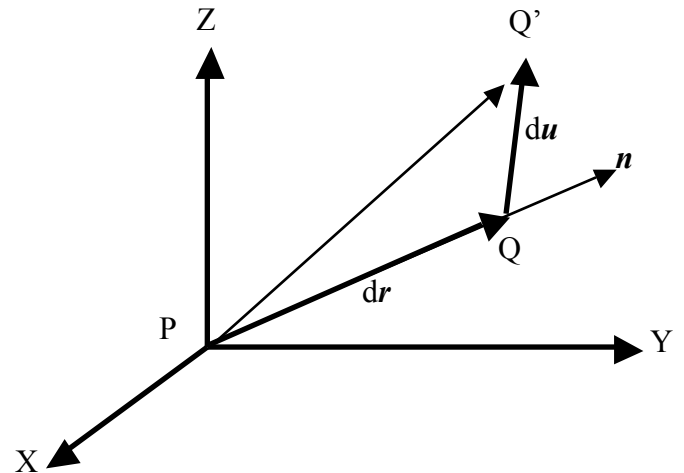


図 1 ひずみベクトル

ここで, du, dv, dw は変位ベクトルの成分で, 剛体的並進変位や剛体的回転変位を除いた純粋な変形変位である. すなわち, 前回の (17) 式の内の右辺第 1 項のみを用いて, 次のように書き表される.

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_{XX} dX + \varepsilon_{XY} dY + \varepsilon_{XZ} dZ \\ dv &= \varepsilon_{YX} dX + \varepsilon_{YY} dY + \varepsilon_{YZ} dZ \\ dw &= \varepsilon_{ZX} dX + \varepsilon_{ZY} dY + \varepsilon_{ZZ} dZ \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, 線素 dr の単位長さ当たりの du を, 次式のように, 方向 n を向く線素のひずみベクトル ε^n と定義する.

$$\begin{aligned} \varepsilon^n &= \frac{du}{dr} \\ &= i \frac{du}{dr} + j \frac{dv}{dr} + k \frac{dw}{dr} \\ &= i(\varepsilon_{XX} dX + \varepsilon_{XY} dY + \varepsilon_{XZ} dZ) \frac{1}{dr} \\ &\quad + j(\varepsilon_{YX} dX + \varepsilon_{YY} dY + \varepsilon_{YZ} dZ) \frac{1}{dr} \\ &\quad + k(\varepsilon_{ZX} dX + \varepsilon_{ZY} dY + \varepsilon_{ZZ} dZ) \frac{1}{dr} \end{aligned} \quad (3)$$

dX/dr は方向余弦 v_{nX} になるので,

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{\varepsilon}^n = & \mathbf{i}(v_{nX}\varepsilon_{XX} + v_{nY}\varepsilon_{XY} + v_{nZ}\varepsilon_{ZX}) \\ & + \mathbf{j}(v_{nX}\varepsilon_{XY} + v_{nY}\varepsilon_{YY} + v_{nZ}\varepsilon_{YZ}) \\ & + \mathbf{k}(v_{nX}\varepsilon_{ZX} + v_{nY}\varepsilon_{YZ} + v_{nZ}\varepsilon_{ZZ})\end{aligned}\quad (4)$$

これより，上式は応力ベクトル σ^n に関する式と類似の式であることがわかる．すなわち，応力ベクトルと同様に，物体内の任意の位置 P における任意の方向 n の線素に関するひずみベクトル ε^n は，9つの成分を有するひずみテンソル ε_{ij} ($i, j = X, Y, Z$) を用いて一意に表せることになる．

2. 主ひずみ

任意の方向 n を向く線素のに関するひずみベクトル ε^n は，ひずみテンソル ε_{ij} を用いて(4)式で表すことができた．一般には，ひずみベクトル ε^n は線素 n と平行ではないが，ある特定の方向では，ひずみベクトル ε^n が線素 n に平行になり，せん断成分がゼロとなる場合がある．このような方向を主軸，作用する垂直ひずみを主ひずみと言う．

主軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{m}$ ，対応する主ひずみを ε とすると，主軸方向のひずみベクトル ε^m は次式となる．

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \varepsilon \cdot \mathbf{m} = \mathbf{i}v_{mX}\varepsilon + \mathbf{j}v_{mY}\varepsilon + \mathbf{k}v_{mZ}\varepsilon \quad (8)$$

ここで， v_{mX} ， v_{mY} ， v_{mZ} は主軸方向の方向余弦である．また，主軸に関するひずみベクトル ε^m は(4)式を用いると次式となる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^m = & \mathbf{i}(v_{mX}\varepsilon_{xx} + v_{mY}\varepsilon_{yx} + v_{mZ}\varepsilon_{zx}) \\ & + \mathbf{j}(v_{mX}\varepsilon_{xy} + v_{mY}\varepsilon_{yy} + v_{mZ}\varepsilon_{zy}) \\ & + \mathbf{k}(v_{mX}\varepsilon_{xz} + v_{mY}\varepsilon_{yz} + v_{mZ}\varepsilon_{zz})\end{aligned}\quad (9)$$

(8) 式と (9)式とを等値すると，次式となる．

$$\begin{aligned}& \mathbf{i}(v_{mX}\varepsilon_{XX} - v_{mX}\varepsilon + v_{mY}\varepsilon_{YX} + v_{mZ}\varepsilon_{ZX}) \\ & + \mathbf{j}(v_{mX}\varepsilon_{XY} + v_{mY}\varepsilon_{YY} - v_{mY}\varepsilon + v_{mZ}\varepsilon_{ZY}) \\ & + \mathbf{k}(v_{mX}\varepsilon_{XZ} + v_{mY}\varepsilon_{YZ} + v_{mZ}\varepsilon_{ZZ} - v_{mZ}\varepsilon) = 0\end{aligned}\quad (10)$$

i, j, k は1次独立なので，(10)式が成立するためには， v_{mi} ($i = X, Y, Z$) に関する斉次3元1次方程式が成り立たなければならない．

$$\begin{aligned}
 v_{mX}(\varepsilon_{XX} - \varepsilon) + v_{mY}\varepsilon_{YX} + v_{mZ}\varepsilon_{ZX} &= 0 \\
 v_{mX}\varepsilon_{XY} + v_{mY}(\varepsilon_{YY} - \varepsilon) + v_{mZ}\varepsilon_{ZY} &= 0 \\
 v_{mX}\varepsilon_{XZ} + v_{mY}\varepsilon_{YZ} + v_{mZ}(\varepsilon_{ZZ} - \varepsilon) &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

一般に、主軸ベクトルの方向余弦 v_{mX} , v_{mY} , v_{mZ} は全て0にはならないので、(11)式が成り立つためには、次式を満足しなければならない。

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{XX} - \varepsilon & \varepsilon_{YX} & \varepsilon_{ZX} \\ \varepsilon_{XY} & \varepsilon_{YY} - \varepsilon & \varepsilon_{ZY} \\ \varepsilon_{XZ} & \varepsilon_{YZ} & \varepsilon_{ZZ} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

(12)式を展開すると、次式となる。

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0 \tag{13}$$

ここで、 I_1, I_2, I_3 は次式で定義されている。

$$I_1 = \varepsilon_{XX} + \varepsilon_{YY} + \varepsilon_{ZZ} \tag{14}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{YY} & \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZY} & \varepsilon_{ZZ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{ZZ} & \varepsilon_{ZX} \\ \varepsilon_{XZ} & \varepsilon_{XX} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{XX} & \varepsilon_{XY} \\ \varepsilon_{YX} & \varepsilon_{YY} \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{XX} & \varepsilon_{XY} & \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YX} & \varepsilon_{YY} & \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZX} & \varepsilon_{ZY} & \varepsilon_{ZZ} \end{vmatrix} \tag{16}$$

(13) 式は ε に関する3次方程式なので、その解は一般に3個存在する。これが、求める主ひずみの大きさ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を与える。主軸の方向は、得られた主ひずみの大きさ ε_i を(11)式に代入して、 $v_{mi}(i=X, Y, Z)$ について解けばよい。この計算は、ひずみテンソルの固有値と固有ベクトルを求めることと等価である。

なお、(13)式は主ひずみの大きさ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を用いて、次式のように表すことができる。

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) = 0 \tag{17}$$

(17)式を展開して、(13)式と比較すると、次式が得られる。

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{18}$$

$$I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \tag{19}$$

$$I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \tag{20}$$

主ひずみは任意の点でのひずみ状態を特徴付けるものなので、座標変換に関して不変である。したがって、 I_1, I_2, I_3 も座標変換に関して不変となり、各々、1次、2次、3次のひずみ不変量と呼ばれている。

4. ひずみの適合条件

前回の講義で示したように、微小変形理論では、ひずみテンソルの成分は変位勾配の対称成分として (21) 式のように表すことができた。また、この場合、2次以上の高次の微少量を無視するので、Lagrange strain E_{ij} と Euler Strain e_{ij} とを区別する必要もなくなることも、既に、述べた。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u, & u_2 &= v, & u_3 &= w \\ x_1 &= X, & x_2 &= Y, & x_3 &= Z \end{aligned}$$

そうすると、 u, v, w という3つの変位成分から6つのひずみテンソルの成分 ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}$) を求めることになるので、ひずみテンソルの成分を全て独立に与えられないことがわかる。そこで、ひずみテンソルの成分間にはある関係式が成り立っていなければならない、それをここで導出してみる。

まず、(21) 式を x_k と x_l で2階偏微分する。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right) \quad (22)$$

同様にして、 $\frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k}, \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l}$ を求めると、

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_l \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_l \partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \right) \quad (25)$$

となる。(22) 式と(23) 式の和から、(24) 式と(25) 式の和を引くと、右辺は相殺されて0になることが分かる。すなわち、ひずみに関する適合条件が得られる。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \quad (26)$$

これが、適合条件の1つの式であるので、 i, j, k, l に各々X, Y, Z を代入すると、合計 81 個の式が得られるが、その中の恒等式や繰り返しを除くと、(26)式に類似する次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \quad (29)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (30)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \quad (31)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \quad (32)$$

この6個の式が成り立てば、ひずみテンソルの成分から1価の連続関数として変位を一意に決定できる。このことは、変形によって、物体内に食い違いや重なりが生じず、連続体を保つための必要十分条件となっている。

<演習問題>

物体内の変位場が次式で与えられている。主ひずみとその方向を求めよ。ただし、微小変形として計算せよ。

$$2\mu u = 4x - y + 3z$$

$$2\mu v = x + 7y$$

$$2\mu w = -3x + 4y + 4z$$