連続体力学　配付資料　OCW-i

第 12 回　ひずみテンソル

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．ひずみテンソルの定義

図１に示すように，変形前の物体 V_0 中の任意の点 P (X, Y, Z)とその近傍 Q (X', Y', Z') を考える．外力により物体が変形して V の状態になった時，点 P (X, Y, Z) は点 p (x, y, z)に移動し，また，点 Q (X', Y', Z') は点 q (x', y', z')に移動したとする．点 P から点 p までのベクトルを変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ (u, v, w) と定義すると．

$$
\begin{aligned}
u &= x - X \\
v &= y - Y \qquad (1) \\
w &= z - Z
\end{aligned}
$$

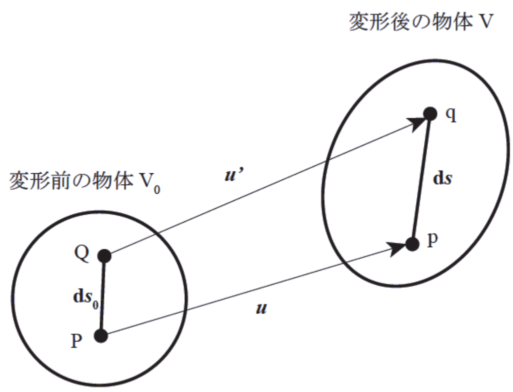

図１　物体の変形

点 Q に関しても，変位ベクトル $\boldsymbol{u}'$ (u', v', w')が考えられ もし，$\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{u}'$に等しい場合は，変形による変位はなく，並進や回転などの剛体運動による変位だけになる．したがって，ここでは，変形変位について着目することにする．

点 P と点 p は，そもそも，この物体中の同じ点を表しているので，変形後の座標 p (x, y, z) は変形前の座標 P (X, Y, Z)と一対一対応しているはずである．それ故に，p (x, y, z)と P (X, Y, Z)には，次のような関数関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x &= x(X,\quad Y,\quad Z) \\
y &= y(X,\quad Y,\quad Z) \qquad (2) \\
z &= z(X,\quad Y,\quad Z)
\end{aligned}
$$

この関係より，変形後における座標の微小変化は次のように表すことができる

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial X}dX + \frac{\partial x}{\partial Y}dY + \frac{\partial x}{\partial Z}dZ \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial X}dX + \frac{\partial y}{\partial Y}dY + \frac{\partial y}{\partial Z}dZ \qquad (3) \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial X}dX + \frac{\partial z}{\partial Y}dY + \frac{\partial z}{\partial Z}dZ
\end{aligned}
$$

剛体的並進変位の影響を取り除くために，変形前における点 P から点 Q への距離 ds_0 の自乗と，変形後の点 p から点 q への距離 ds の自乗との差を考える．

$$
\begin{aligned}
(ds)^2 - (ds_0)^2 &\equiv \left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] - \left[dX^2 + dY^2 + dZ^2\right] \\
&= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)dX + \left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)dY + \left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)dZ\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)dX + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)dY + \left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)dZ\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)dX + \left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)dY + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)dZ\right]^2 - \left[dX^2 + dY^2 + dZ^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2-1\right]dX^2+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)^2-1\right]dY^2\\
&+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)^2-1\right]dZ^2\\
&+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)\right]dYdZ+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)\right]dZdY\\
&+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)\right]dZdX+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)\right]dXdZ\\
&+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)\right]dXdY+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)\right]dYdX \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv 2E_{XX}dX^2+2E_{YY}dY^2+2E_{ZZ}dZ^2\\
&+2E_{YZ}dYdZ+2E_{ZY}dZdY+2E_{ZX}dZdX+2E_{XZ}dXdZ+2E_{XY}dXdY+2E_{YX}dYdX \qquad (5)
\end{aligned}
$$

(5)式中の E_{ij} (i,j = X, Y, Z)でひずみテンソルが定義され，これは，Lagrange strain tensor あるいは Green strain tensor と呼ばれている．

もし，(2)式の替わりに，p (x, y, z) と P (X, Y, Z) の間の逆関係を使うとすると，

$$
\begin{aligned}
X &= X(\ x,\ \ y,\ \ z\ )\\
Y &= Y(\ x,\ \ y,\ \ z\ ) \qquad (6)\\
Z &= Z(\ x,\ \ y,\ \ z\ )
\end{aligned}
$$

そして，変形前の座標の微小変化を表すと，

$$
\begin{aligned}
dX &= \frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy+\frac{\partial X}{\partial z}dz\\
dY &= \frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy+\frac{\partial Y}{\partial z}dz \qquad (7)\\
dZ &= \frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy+\frac{\partial Z}{\partial z}dz
\end{aligned}
$$

となり，これより，

$$
\begin{aligned}
(ds)^2-(ds_0)^2 &= \left[dx^2+dy^2+dz^2\right]\\
&-\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)dz\right]^2-\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dz\right]^2-\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz\right]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[1-\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2\right]dx^2+\left[1-\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right]dy^2+\left[1-\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right]dz^2\\
&-\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]dydz-\left[\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right]dzdy\\
&-\left[\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]dzdx-\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]dxdz\\
&-\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right]dxdy-\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]dydx \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$\equiv 2e_{xx}dx^2 + 2e_{yy}dx^2 + 2e_{zz}dz^2$$

$$+2e_{yz}dydz + 2e_{zy}dzdy + 2e_{zx}dzdx + 2e_{xz}dxdz + 2e_{xy}dxdy + 2e_{yx}dydx \qquad (9)$$

(9)式中の e_{ij} (i,j = x, y, z) でひずみテンソルが定義され，これは， Euler strain tensor あるいは Almansi strain tensor と呼ばれている．．

２．ひずみテンソルと工学ひずみ

ここでは，ひずみテンソルの定義が，通常，用いられている工学ひずみ（初期長さに対する変位の比）と同じ物理的意味をもっていることを確認する．そのために，(1) 式を(4)式に代入して，(5)式を具体的に書いてみると，

$$E_{XX} = \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial X}(X+u)\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial X}(Y+v)\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial X}(Z+w)\right\}^2 - 1\right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2\right] \qquad (10)$$

$$\cong \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) \qquad (11)$$

$$E_{XY} = \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial X}(X+u)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial Y}(X+u)\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial X}(Y+v)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial Y}(Y+v)\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial X}(Z+w)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial Y}(Z+w)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial Y}\right)\right] \qquad (12)$$

$$\cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\right) \qquad (13)$$

(10) 式と (12) 式は Lagrange strain の別の表現であり，テンソル表記で表すと，

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right] \qquad (14)$$

ここで，$u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$, $X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$.とした．

また，(1)式を(8)式に代入して，(9)式をテンソル表記で具体的に書いてみると，

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right] \qquad (15)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial X}dX\right) - u}{dX} = \frac{\partial u}{\partial X}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = 2E_{XY}$$

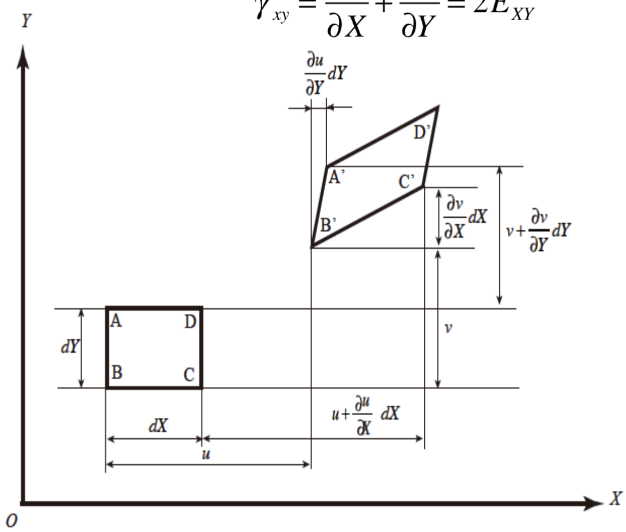

図２　E_{XX} と E_{XY} の幾何学的意味

これも，Euler Strain の別の表現である．(14) 式と (15) 式の添字 i と j を交換すると同じ式が得られるので，E_{ij} と e_{ij} とは対称テンソルであることがわかる．

(11)式と (13)式の導出では，高次の微少量を無視して近似してきたが，このような近似をして解析する理論形式を微小変形理論という．(11)式から明らかなように，E_{XX} は X 方向の基準長さ（初期長さ）dX に対する X 方向の相対変位 du の比となり，工学ひずみε_{xx}（垂直応力成分）に一致する．同様に，E_{XY} は基準長さ dX に対する Y 方向の相対変位 dv の比と，基準長さ dY に対する X 方向の相対変位 du との比の和の半分になっている．これは，図 3 に示した変形による∠α の変化の半分に対応し，図 3 に示した通常用いられている工学的せん断ひずみγ_{XY}の半分になっている．これより，一部，係数の違いはあるが，ひずみテンソルと工学ひずみの物理的意味は同じであることがわかる．

なお，$\partial u_i/\partial X_j$ (i,j = 1, 2, 3) は変位勾配テンソルと呼ばれていて，(11)式および(13)式における微小変形理論でのひずみテンソルは．変位勾配の対称成分からなると言うことができる．

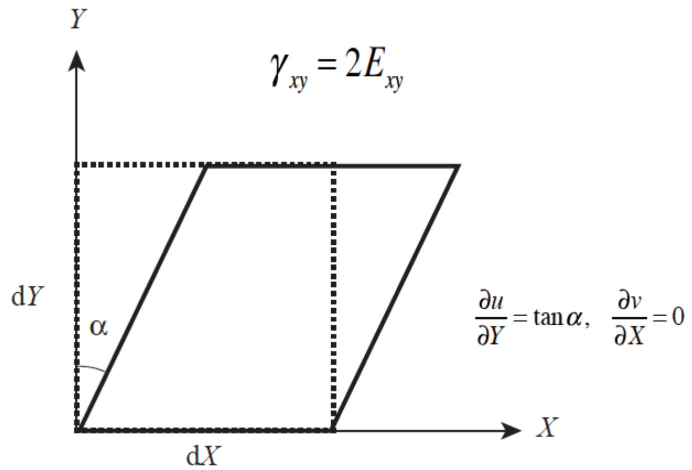

図３　工学的せん断ひずみγ_{xy}

３．ひずみテンソルと回転テンソル

以上の議論では，隣接する 2 つの点 P と Q とを考えることによって剛体的並進変位の影響を取り除いてきたが，実は，このようにひずみテンソルを定義すると，剛体的回転変位の影響も自動的に除外されているのである．それは，変位ベクトル $\boldsymbol{u}(u, v, w)$の微小変化を考えればよい．例えば，X 方向の成分 du については次式となる．

$$
\begin{aligned}
du &= \frac{\partial u}{\partial X}dX + \frac{\partial u}{\partial Y}dY + \frac{\partial u}{\partial Z}dZ \\
&= \frac{\partial u}{\partial X}dX + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right)\right]dY + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Z} - \frac{\partial w}{\partial X}\right)\right]dZ \\
&= E_{XX}dX + \left[E_{XY} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right)\right]dY + \left[E_{ZX} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Z} - \frac{\partial w}{\partial X}\right)\right]dZ \\
&= E_{XX}dX + \left[E_{XY} - \omega_{XY}\right]dY + \left[E_{ZX} + \omega_{ZX}\right]dZ \qquad (16)
\end{aligned}
$$

ここで，ω_{ij} (i,j = X,Y,Z) は回転テンソルと呼ばれる量で，変位勾配の交代成分となっている．(16)式に加えて，Y 方向の微小変化 dv と Z 方向の微小変化 dw も合わせて示すと，次式となる．

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{XX} & E_{XY} & E_{XZ} \\ E_{YX} & E_{YY} & E_{YZ} \\ E_{ZX} & E_{YZ} & E_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{XY} & \omega_{ZX} \\ \omega_{XY} & 0 & -\omega_{YZ} \\ -\omega_{ZX} & \omega_{YZ} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} \quad (17)$$

なお，図 4 から，回転テンソルω_{ij} が剛体的回転変位を表していることがわかる．すなわち，XY 平面上の微小要素 PABC が Z 軸の周りを剛体的回転して PA’B’C’ になったとする，この時の回転角は∂v/∂X となるが，それは-∂u/∂Y とも等しい．一方，ω_{XY} を計算してみると，次式となる．

$$\begin{aligned} \omega_{XY} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X}\right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial X} \end{aligned} \quad (18)$$

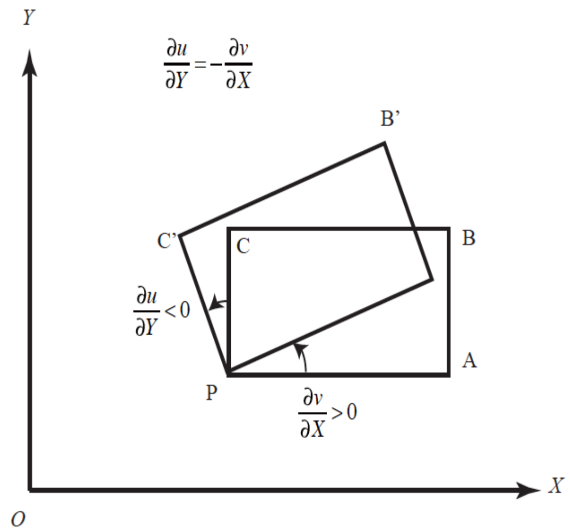

図４　ω_{XY} の幾何学的意味

このように，回転テンソルの成分と剛体的回転の回転角は等しくなる．したがって，(16)式の右辺第１項のみを取り出して考えれば，自動的に，剛体的回転変位も除外され，純粋な変形変位のみを議論できることになる．．

〈演習１〉　変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ が次式で与えられている物体を考える．

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu}\left[(X-Z)^2\mathbf{e}_x + (Y+Z)^2\mathbf{e}_y - XY\mathbf{e}_z\right]$$

ここで， μ は剛性率である．点 P (0, 2, -1)におけるひずみテンソルと回転テンソルを求めよ．ただし，微小変形として計算せよ．

＜演習２＞　物体内の変位場が次式で与えられている. ひずみテンソルを求めよ．ただし，微少変形として計算せよ．μは剛性率である．

$$u = \frac{1}{2\mu}\left[4X - Y + 3Z\right]$$

$$v = \frac{1}{2\mu}\left[X + 7Y\right]$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\left[-3X + 4Y + 4Z\right]$$