第 11 回　応力テンソル（２）

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．主応力

単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を持つ任意の面 ds における応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は，応力テンソル σ_{ij} で表すことができる．一般的には，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に平行ではないが，ある特定の面では，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ は単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に平行となり，剪断成分がゼロになることある．この面のことを主応力面と言い，その応力ベクトルの大きさを主応力と言う．

主応力面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{m}$ で表し，それに対応する主応力の大きさを σ で表すと，主応力面での応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^m$ は，次式で表される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^m &= \sigma\cdot\mathbf{m}\\ &= \sigma\cdot(\mathbf{i}\upsilon_{\mathrm{mx}}+\mathbf{j}\upsilon_{\mathrm{my}}+\mathbf{k}\upsilon_{\mathrm{mz}})\end{aligned} \quad (1)$$

ここで，$\upsilon_{mx}, \upsilon_{my}, \upsilon_{mz,}$ は主応力面の単位法線ベクトルの方向余弦である．一方，主応力面の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^m$ は次のように表されることは，前回の(9)式で述べた．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^m = &\boldsymbol{i}(\upsilon_{mx}\sigma_{xx}+\upsilon_{my}\sigma_{yx}+\upsilon_{mz}\sigma_{zx})\\ &+\boldsymbol{j}(\upsilon_{mx}\sigma_{xy}+\upsilon_{my}\sigma_{yy}+\upsilon_{nz}\sigma_{zy})\\ &+\boldsymbol{k}(\upsilon_{mx}\sigma_{xz}+\upsilon_{my}\sigma_{yz}+\upsilon_{mz}\sigma_{zz})\end{aligned} \quad (2)$$

(1)式 と(2)式を等値すると，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}(\upsilon_{mx}\sigma_{xx}-\upsilon_{mx}\sigma+\upsilon_{my}\sigma_{yx}+\upsilon_{mz}\sigma_{zx})\\ &+\boldsymbol{j}(\upsilon_{mx}\sigma_{xy}+\upsilon_{my}\sigma_{yy}-\upsilon_{my}\sigma+\upsilon_{nz}\sigma_{zy})\\ &+\boldsymbol{k}(\upsilon_{mx}\sigma_{xz}+\upsilon_{my}\sigma_{yz}+\upsilon_{mz}\sigma_{zz}-\upsilon_{mz}\sigma) = 0\end{aligned} \quad (3)$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は一次独立なベクトルであるから，(3)式を満足する υ_{mi} (i = x, y, z) に関する連立一次方程式を得る．

$$\begin{aligned}\upsilon_{mx}(\sigma_{xx}-\sigma)+\upsilon_{my}\sigma_{yx}+\upsilon_{mz}\sigma_{zx} &= 0\\ \upsilon_{mx}\sigma_{xy}+\upsilon_{my}(\sigma_{yy}-\sigma)+\upsilon_{nz}\sigma_{zy} &= 0\\ \upsilon_{mx}\sigma_{xz}+\upsilon_{my}\sigma_{yz}+\upsilon_{mz}(\sigma_{zz}-\sigma) &= 0\end{aligned} \quad (4)$$

この連立 1 次方程式が自明でない解を持つためには，

$$\begin{vmatrix}\sigma_{xx}-\sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma & \sigma_{zy}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma\end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

(5)式を展開して，

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \qquad (6)$$

ここで， J_1, J_2, J_3 は，次式で定義されている．

$$J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \qquad (7)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

ここで，(6)式は，3 次方程式なので，一般的に 3 つの根を持つ．これら 3 つの解が，主応力$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$の大きさを表している．主軸方向（すなわち，主面の単位法線ベクトル）は(4)式に主応力の値σ_i を代入して，υ_{mi}について，それぞれ解けばよい．この計算は，応力テンソルの固有値と固有ベクトルを求める計算と等価である．

さらに，(6)式を主応力$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$を使って書き換えると，

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \qquad (10)$$

(10)式を展開し，(6)式と比較すると，

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \qquad (11)$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \qquad (12)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \qquad (13)$$

主応力の 3 つの値の組み合わせは対象としている点の応力状態を規定しているので，その 3 つの値の組み合わせは座標系の直交変換には独立である．このことは，J_1, J_2, J_3も直交変換に独立であり，それ故に，1 次，2 次，3 次の不変量と呼ばれている．

２．平衡方程式

図１には，x, y, z 軸に垂直な面を持つ微小体積要素を示す．x 軸に関するニュートンの並進運動に関する運動方程式を書くと，

$$\begin{aligned}\rho dxdydz\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = &\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz - \sigma_{xx}dydz \\ &+\left(\sigma_{yx} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx - \sigma_{yx}dzdx \\ &+\left(\sigma_{zx} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy - \sigma_{zx}dxdy \\ &+ f_x dxdydz \qquad (14)\end{aligned}$$

ここで，ρ は密度，u はx 軸方向の変位，f_x は体積力である．y 軸やz 軸方向にも同

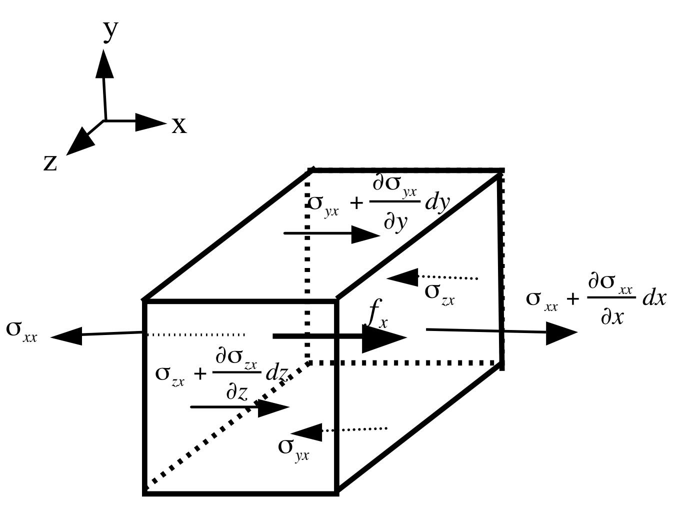

Fig. 1 Force balance along x axis.

様な式が成り立ち，それぞれの式で同じ値で符号が違うものを相殺すると，最終的に，次の 3 つの方程式が得られる．．

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+f_x \qquad (15)$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial z}+f_y \qquad (16)$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+f_x \qquad (17)$$

ここで， v と w は y 軸と z 軸方向の変位である．もし，この体積要素が内部応力によって静的釣り合い状態にあるならば，これらの方程式の左辺は０になるはずである．このようにして，応力テンソルの平衡方程式が次のように得られる．

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+f_x=0 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial z}+f_y=0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+f_x=0 \qquad (20)$$

さらに，体積力 $\boldsymbol{f}$ がなければ，

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}=0 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial z}=0 \qquad (22)$$

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0 \qquad (23)$$

次に，z 軸に関するニュートンの回転運動に関する運動方程式を検討する．図２に参照して，

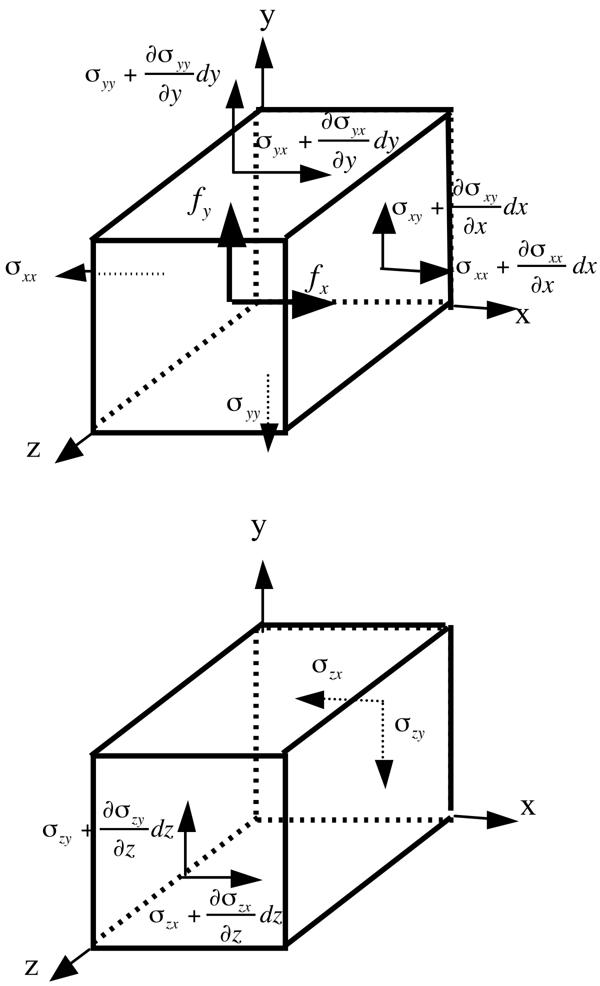

Fig.2　Balance of moment around z axis.

$$
\begin{aligned}
I_3 \frac{\partial^2 \omega_{xy}}{\partial t^2} = & -\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dydz \bullet \frac{dy}{2} + \sigma_{xx} dydz \bullet \frac{dy}{2} \\
& + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx\right) dydz \bullet dx - \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz \bullet dy \\
& + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy\right) dxdz \bullet \frac{dx}{2} - \sigma_{yy} dxdz \bullet \frac{dx}{2} \\
& + \left(\sigma_{zy} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} dz\right) dxdy \bullet \frac{dx}{2} - \sigma_{zy} dxdy \bullet \frac{dx}{2} \\
& - \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy \bullet \frac{dy}{2} + \sigma_{zx} dxdy \bullet \frac{dy}{2} \\
& - f_x dxdydz \bullet \frac{dy}{2} + f_y dxdydz \bullet \frac{dx}{2}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

が得られる．ここで，I_3 は z 軸に関する慣性モーメント，ω_{xy} は回転角を表す．同様にして，いくつかの項を相殺すると，x 軸と y 軸に関する同様な方程式が得られる．

$$I_1 \frac{\partial^2 \omega_{yz}}{\partial t^2} = \left(\sigma_{yz} - \sigma_{zy}\right) dxdydz \tag{25}$$

$$I_2 \frac{\partial^2 \omega_{zx}}{\partial t^2} = \left(\sigma_{zx} - \sigma_{xz}\right) dxdydz \tag{26}$$

$$I_3 \frac{\partial^2 \omega_{xy}}{\partial t^2} = \left(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}\right) dxdydz \tag{27}$$

しかしながら，慣性モーメント I_i (i=1,2,3) の大きさはρdx^5程度であるので，これらの方程式の左辺は高位の無限小として無視しても良い．すなわち，

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \tag{28}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} \tag{29}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \tag{30}$$

この導出から，応力テンソルは対称テンソルであることがわかる．また，それ故に，3 つの主応力は実数となって，主応力面は互いに直交することがわかる．もし， 磁性流体のように，体積モーメント（単位体積当たりに作用する外部モーメント）があれば，応力テンソルは非対称テンソルになる．

演習問題

物体中のある点の応力状態が以下のように与えられている．この点に関する主応力の大きさと方向を求めよ．

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad i,j = x,y,z$$