第 7 回　応力テンソル（１）

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．応力ベクトル

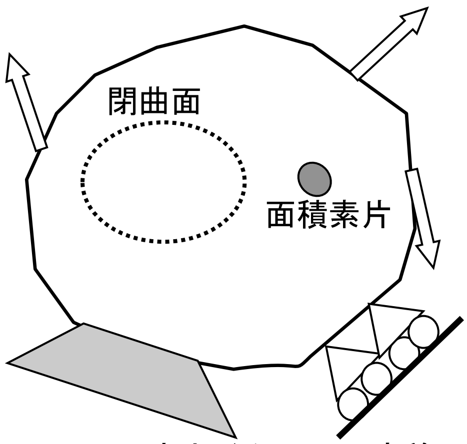

図 1　応力ベクトルの定義

第 5 回の講義(材料力学における応力ベクトル)では，断面積一定の棒状試験片を横切る仮想断面を考えたが，実際の物体では，いつも，断面積が一定であるとは限らない．また，表面力の作用する領域や，変位拘束の領域によっては，物体内に応力ベクトルに分布が生じる．このような場合にも使えるように，応力ベクトルを再定義する．

ここで，自由物体法を適用すると，物体内に完全に含まれてしまう閉曲面で囲まれた領域を考えても，その閉曲面で囲まれた領域が加速度運動しなければ，閉曲面を通しての力の釣り合いが成り立つはずである．

さらに言えば，閉曲面でなくても，物体内の任意の点 x における面積素片 ΔS を考えれば，その面積素片の右側から左側に作用する力と，左側から右側に作用する力が釣り合っているからこそ，その面積素片は加速度運動をしないこともわかる．

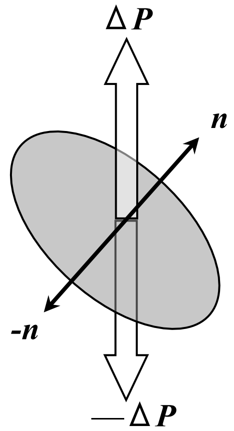

図 2　微小面積素片 dS での力のつりあい

面積素片の片方の面を表面とし，もう一つの面を裏面としよう（表面，裏面は表裏を区別するために便宜上使っている言葉で，どちらを表面としてもいいのであるが，ここでは，面法線が座標軸の正の方向を向いている面を表面とする．このようにすると，力の釣り合いを考えたときに，符号が自然に定義できるようになるからである．なお，面積素片ΔS 自体には正負は考えず，常に正の量として扱うことにする）．そうすると，表面に立てた単位法線を $\boldsymbol{n}$ とすれば，裏面に立てた単位法線は $-\boldsymbol{n}$ になる．表面に作用する力ベクトルを$\Delta\boldsymbol{P}$（$=|\Delta\boldsymbol{P}|\cdot\boldsymbol{m}$，$|\Delta\boldsymbol{P}|$は力ベクトル$\Delta\boldsymbol{P}$ の大きさ，$\boldsymbol{m}$ は力ベクトル方向の単位ベクトル，一般には，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ は異なる）とすれば，　裏面に作用する力ベクトルは 逆向きのベクトルなので　$-\Delta\boldsymbol{P}$（$=|\Delta\boldsymbol{P}|\cdot -\boldsymbol{m}$）となり，両者の和は 0 ベクトルとなって釣り合いの条件を満たす．この時，表面の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ を

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dS} \qquad (1)$$

で定義する．すなわち，物体中の任意の点 x において，適当な面を指定すれば，その

面に作用する応力ベクトルを定義することができ，物体内に応力分布があっても考察の対象とすることができる．　このように定義すれば，裏面に作用する応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^{-n}$ は，

$$\boldsymbol{\sigma}^{-n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{-\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} = -\frac{d\boldsymbol{P}}{dS} = -\boldsymbol{\sigma}^{n} \qquad (2)$$

となって，

$$\boldsymbol{\sigma}^{n} + \boldsymbol{\sigma}^{-n} = \boldsymbol{\sigma}^{n} + (-\boldsymbol{\sigma}^{n}) = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

自動的に釣り合いの条件も満足する．また，繰り返しになるが，図 2 に示すように，一般には，応力ベクトル σ^{n} の方向($\boldsymbol{m}$ ベクトルの方向)と面法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向は一致しないので注意すること．

もし，第 5 回講義と同様に，応力ベクトル σ^{n} を面法線に平行な垂直応力ベクトル $\sigma^{\mathrm{n}}_{\mathrm{n}}$ と，垂直な剪断応力ベクトル $\sigma^{\mathrm{n}}_{\mathrm{t}}$ に分けるとしたら，

$$\boldsymbol{\sigma}^{n}_{n} = (\boldsymbol{\sigma}^{n} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{n}_{t} = \boldsymbol{\sigma}^{n} - \boldsymbol{\sigma}^{n}_{n} \qquad (5)$$

とすればよい．

２．応力テンソル

図３に示すように，表面力(面を介して作用する力)F_{i} や体積力(重力や遠心力のように単位体積あたりで負荷される力)W_{j} が作用することにより，内部応力状態にある物体 V を仮定する．物体内の任意の点 P を参照し，図４に示したような無限小 4 面体を作る．面 ABC(面積 dS)に作用する応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}^{n}$ とし，x 軸，y 軸，z 軸に垂直な面 PBC(面積 $dS_x(=\nu_x \cdot dS)$)，PCA(面積 $dS_y(=\nu_y \cdot dS)$)，PAB(面積 $dS_z(=\nu_z \cdot dS)$)に作用する応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}^{-x}$, $\boldsymbol{\sigma}^{-y}$, $\boldsymbol{\sigma}^{-z}$ とすると（面法線が座標軸の負の方向を向いているので，これらを裏面の応力ベクトルとした），無限小 4 面体の力のつりあいから，次式が得られる．

$$\boldsymbol{\sigma}^{n} dS + \boldsymbol{\sigma}^{-x} dS_x + \boldsymbol{\sigma}^{-y} dS_y + \boldsymbol{\sigma}^{-z} dS_z + f dV = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma}^{n} dS - \boldsymbol{\sigma}^{x} dS_x - \boldsymbol{\sigma}^{y} dS_y - \boldsymbol{\sigma}^{z} dS_z + f dV = 0 \qquad (6)$$

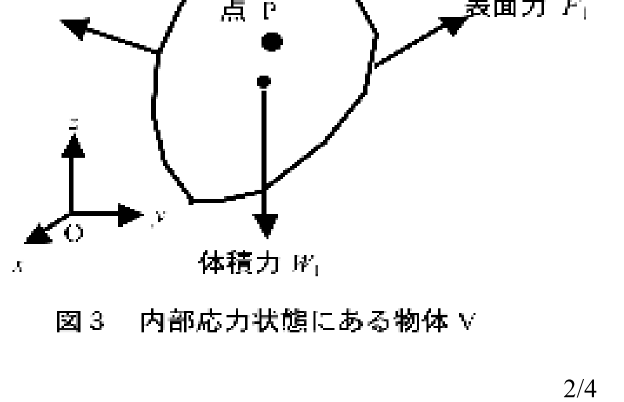

図３　内部応力状態にある物体 V

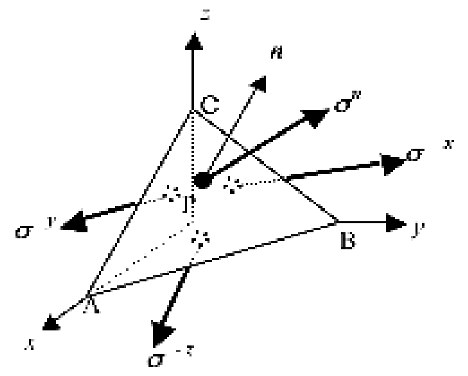

図４　微小 4 面体の力の釣り合い

ここで，$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{x}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{y}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{z}}$ は微小 4 面体の正の面に作用する応力ベクトル，$\boldsymbol{f}$ は体積力，$\mathrm{d}V$ は微小 4 面体の体積である．微小 4 面体を限りなく小さくしていくと，$\mathrm{d}V$ は $\mathrm{d}S$ に,比べて高位の微小量となるので，(6)式を書き換えると次式が得られる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} &= \frac{S_x}{S}\boldsymbol{\sigma}^x + \frac{S_y}{S}\boldsymbol{\sigma}^y + \frac{S_z}{S}\boldsymbol{\sigma}^z \\ &= \nu_{\mathrm{nx}}\boldsymbol{\sigma}^x + \nu_{ny}\boldsymbol{\sigma}^y + \nu_{nz}\boldsymbol{\sigma}^z \qquad (7)\end{aligned}$$

ここで，$\upsilon_{\mathrm{nx}}, \upsilon_{\mathrm{ny}}, \upsilon_{\mathrm{nz}}$ 面 ABC の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向余弦であり（$\boldsymbol{n}$ と x 軸，y 軸, z 軸とのなす角度の cosine で，丁度, $\boldsymbol{n}$ を各軸に正射影した大きさになっていて），$\boldsymbol{n}$ の成分$\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}$に一致する．

次に，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{x}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{y}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{z}}$ は，x 軸，y 軸，z 軸に沿った基底ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いると，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{i}\sigma_{xx} + \boldsymbol{j}\sigma_{xy} + \boldsymbol{k}\sigma_{xz} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{y}} &= \boldsymbol{i}\sigma_{yx} + \boldsymbol{j}\sigma_{yy} + \boldsymbol{k}\sigma_{yz} \qquad (8) \\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{z}} &= \boldsymbol{i}\sigma_{zx} + \boldsymbol{j}\sigma_{zy} + \boldsymbol{k}\sigma_{zz}\end{aligned}$$

式 (8) を式(7)に代入すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} = &\boldsymbol{i}(\nu_{nx}\sigma_{xx} + \nu_{ny}\sigma_{yx} + \nu_{nz}\sigma_{zx}) \\ &+\boldsymbol{j}(\nu_{nx}\sigma_{xy} + \nu_{ny}\sigma_{yy} + \nu_{nz}\sigma_{zy}) \qquad (9) \\ &+\boldsymbol{k}(\nu_{nx}\sigma_{xz} + \nu_{ny}\sigma_{yz} + \nu_{nz}\sigma_{zz})\end{aligned}$$

この式より，物体内の任意の点 P で適当な面 dS（面法線 $\boldsymbol{n}$）を指定すれば，そこでの応力ベクトルσ^{n} は 9 個の応力テンソルの成分σ_{ij} (i,j = x,y,z)から代数的に計算することができるのがわかる．なお，いくつかの本では，同じ表現を，次のマトリックス表示で示している．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x, & \sigma_y, & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_x, & \nu_y, & \nu_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

ここで，σ_{i} は応力ベクトル σ^{n} の成分，σ_{ij} は応力テンソルの成分，υ_{j} は面法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分である．もし，我々がアインシュタインの総和規約を使うとすると，上式は次のように簡単に表すことができる．

$$\sigma_i = \nu_j \sigma_{ji} \qquad (11)$$

＜演習１＞

物体中のある点の応力状態が次の応力テンソルで表されていた時，面法線 $\boldsymbol{n}$ が（ν_{nx}，ν_{ny}，ν_{nz}）＝（2/3，-2/3，1/3）である面に関する応力ベクトル σ^{n} を求めよ．また，応力ベクトル σ^{n} を面法線に平行な成分に分解した垂直応力ベクトル $\sigma^{\mathrm{n}}{}_{\mathrm{n}}$，垂直な成分に分解した剪断応力ベクトル $\sigma^{\mathrm{n}}{}_{\mathrm{t}}$ を求めよ．

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$