

第 10 回 梁の曲げ 2

無機材料工学科

准教授 安田公一

1. はじめに

今回は、梁の曲げに関する応力分布とたわみに関する問題を具体的に解いて、理解を深めることにする。

2. 梁の曲げの基本事項 2

2. 1 梁の曲げ応力分布

図 1 に示すように、梁に曲げモーメント M が作用している梁を考える。変形前に平面であった断面は、変形後も軸線に垂直な平面を保つものと仮定する（ベルヌーイの仮定）。曲げモーメント M が作用すると、 NN' 面は曲率半径 ρ で湾曲する。

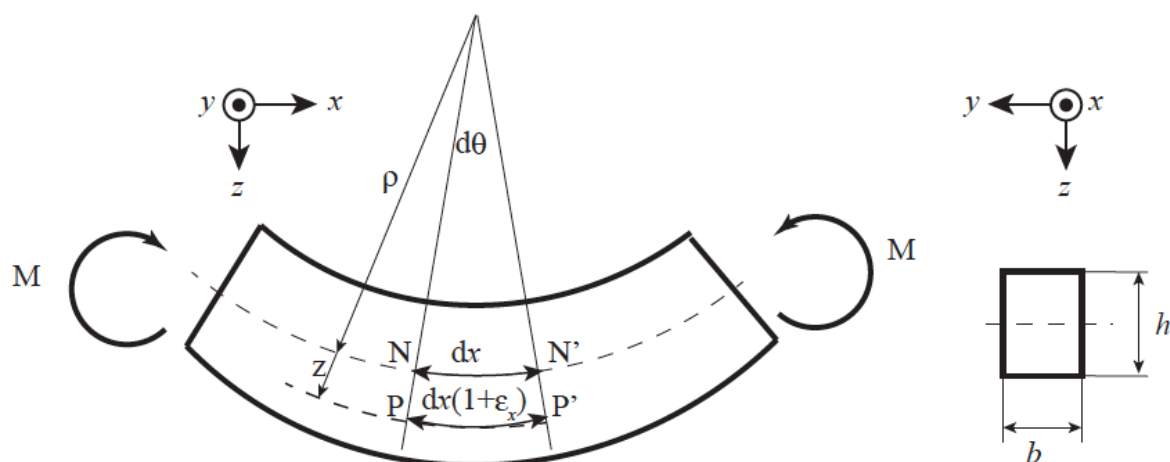


図 1 梁の曲げ応力

この NN' 面は、この変形によって伸縮しない面であるとする。この NN' 面を中立面という。 NN' 面上の微小要素 dx を考え、中立面 NN' からの z 軸方向の距離が z である PP' 面の変形後の長さは、

$$(\rho + z)(+d\theta) \quad (1)$$

となるので、 PP' 面に生じるひずみ ε_x は、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{(\rho+z)(+d\theta)-dx}{dx} \\ &= \frac{(\rho+z)(+d\theta)-\rho d\theta}{\rho d\theta} \\ &= \frac{z}{\rho} \quad (2)\end{aligned}$$

となる。これより、曲げ応力 σ_x は、

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E\varepsilon_x \\ &= E \frac{z}{\rho} \quad (3)\end{aligned}$$

ここで、 E はヤング率である。この曲げ応力を軸線に垂直な断面で積分した合力は 0 になるので、

$$\int_A \sigma_x dA = \int_A \sigma_x dy dz = 0 \quad (4)$$

(3)式を(4)式の左辺に代入して、

$$\int_A E \frac{z}{\rho} dy dz = \frac{E}{\rho} \int_A z dy dz = 0 \quad (5)$$

通常、 y 軸方向(梁の幅 b)は一定であり、また、 z 軸方向の梁の厚さを h とし、中立面が丁度厚さの半分の位置にあるとして、(5)式の左辺の積分を実際に計算してみると、

$$\begin{aligned}& \frac{E}{\rho} \int_0^b dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \\ &= \frac{E}{\rho} [y]_0^b \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{E}{\rho} (b-0) \left(\frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{8} \right) \\ &= 0 \quad (6)\end{aligned}$$

となり、自動的に合力が 0 となっていることがわかる。すなわち、梁の幅方向が一定の梁では、中立面の位置は厚さ方法の半分の位置にあることになる。逆に、(4)式が成り立つように、 z 軸の原点を決めれば、その原点の z の位置が中立面の位置になる。

なお、 $\int_A \sigma_x dA$ を y 軸（梁の幅方向）に関する断面 1 次モーメントと言い、(4)式は、断

面 1 次モーメントが 0 になることを示している。

次に、曲げ応力 σ_x による y 軸周りのモーメントは、その断面の曲げモーメント M

に等しいので,

$$\int_A \sigma_x z dA = \int_A \sigma_x z dy dz = M \quad (7)$$

(3)式を(7)式の左辺に代入して,

$$\int_A E \frac{z^2}{\rho} dy dz = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 dy dz = M \quad (8)$$

通常, y 軸方向(梁の幅 b)は一定であり, また, z 軸方向の梁の厚さを h とし, 中立面が丁度厚さの半分の位置にあるとして, (8)式の左辺の積分を実際に計算してみると,

$$\begin{aligned} & \frac{E}{\rho} \int_0^b dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \\ &= \frac{E}{\rho} [y]_0^b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{E}{\rho} (b-0) \left(\frac{h^3}{24} - (-1) \frac{h^3}{24} \right) \\ &= \frac{E}{\rho} \times \frac{bh^3}{12} \\ &= \frac{E}{\rho} I_y \quad (9) \end{aligned}$$

ここで, I_y は y 軸に関する断面 2 次モーメントと呼ばれ,

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_A z^2 dy dz \quad (10)$$

で定義されている. (9)式が断面の曲げモーメントと等しいとおくと,

$$\frac{E}{\rho} I_y = M \quad (11)$$

すなわち,

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I_y} \quad (12)$$

これを(3)式に代入すると,

$$\sigma_x = E \frac{z}{\rho} = \frac{M}{I_y} z \quad (13)$$

これより, 梁の軸線上の位置 x が決まると, 曲げモーメント $M(x)$ が決まり, また, 梁の厚さ方向の中立面からの距離 z が決まると, 断面 2 次モーメント I_y を与えれば, その位置での軸方向の応力 $\sigma_x(x, z)$ を求めることができる. この場合, 梁の幅方向は一

定なので、応力は y 軸方向には一定となる。

2. 2 断面 2 次モーメント I_y

(10)式で断面 2 次モーメント I_y を定義したが、実際の計算では、図 2 に示すように、断面図を書いて計算するとわかりやすい。

図 2 に示す長方形断面（幅 b 、厚さ h ）の場合は、座標 z から $z+dz$ にある長方形領域の寄与を積分する形で計算すればよく、

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA \\ &= b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \\ &= \frac{bh^3}{12} \end{aligned} \quad (14)$$

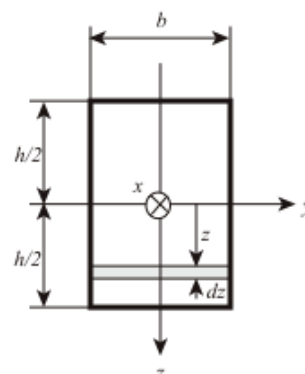


図 2 断面 2 次モーメント

となる。なお、断面 2 次モーメントを計算するときの z 座標の原点は、断面 1 次モーメントが 0 になるような位置としなければならない。図 2 によように対称性の高い断面形状であれば、図形の中心の位置を原点にとればいいが、対称性の悪い断面形状の場合、最初に、適当な点を z 座標の原点として、断面 1 次モーメントを計算し、次式で、断面の図心（3 次元物体の重心に相当する）の座標 (y_0, z_0) を求め、 z 軸方向にたわむ今回の場合は、 z_0 を z 座標の原点に取り直してから、断面 2 次モーメントを求めればよい。

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}, \quad z_0 = \frac{\int_A z dA}{\int_A dA} \quad (15)$$

2. 3 梁の剪断応力分布

前回の(10)式によれば、梁の曲げモーメント $M(x)$ と剪断力 $Q(x)$ の間には、次式が成り立つことがわかっている。

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad (16)$$

したがって、曲げモーメントが一定でない限り、剪断力が軸線に垂直な断面に生じていることになる。これより、その断面にはせん断応力 τ_{zx} が生じていることもわかる。

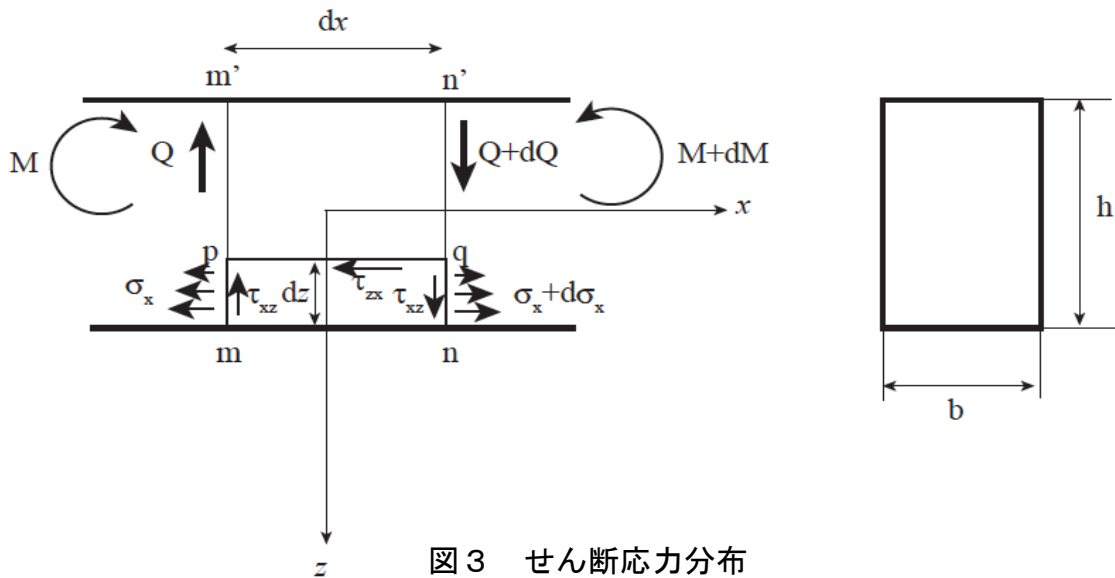


図3 せん断応力分布

図3のような長方形断面（幅 b ，厚さ h ）を持つ梁の微小部分 dx を考えると， m - m' 断面には， M と Q が， n - n' 断面には $M+dM$ と $Q+dQ$ が図のように作用している．この時，梁の下面 m - n を含む微小要素 m - p - q - n に作用する x 軸方向の力のつりあいは，次式となる．

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x + d\sigma_x) b dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x b dz - b \tau_{zx} dx &= 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\sigma_x b dz &= b \tau_{zx} dx \\ \therefore \tau_{zx} dx &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\sigma_x dz \end{aligned} \quad (17)$$

(13)式の微小変化を考えると

$$d\sigma_x = \frac{dM}{I_y} z \quad (18)$$

となり，(17)式に代入すると．

$$\begin{aligned} \tau_{zx} dx &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dM}{I_y} z dz \\ \tau_{zx} &= \frac{1}{I_y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dM(x)}{dx} z dz \end{aligned} \quad (19)$$

さらに，(16)式で $Q(x)$ に書き換えると，

$$\begin{aligned}
 \tau_{zx}(x, z) &= \frac{1}{I_y} \int_z^{\frac{h}{2}} Q(x) z dz \\
 &= \frac{Q(x)}{I_y} \int_z^{\frac{h}{2}} z dz \\
 &= \frac{Q(x)}{I_y} \left[\frac{z^2}{2} \right]_z^{\frac{h}{2}} \\
 \therefore \tau_{zx}(x, z) &= \frac{Q(x)}{I_y} \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

のようにせん断応力分布が求まる。

2. 4 梁のたわみ曲線

図 4 に示すように、真直梁が正の曲げモーメント M を受けて、その軸線が下に凸に撓んだ状態を考える。 x 方向の位置が x である P 点では、 z 方向に z だけ撓み、点 P から軸線上 ds 離れた点を点 Q とする、点 P と点 Q の x 方向の距離は dx とする。また、このように撓んだ軸線を撓み曲線 $z=f(x)$ と呼び、撓み曲線上の点から引いた接線が元の軸線となす角を撓み角 θ という。

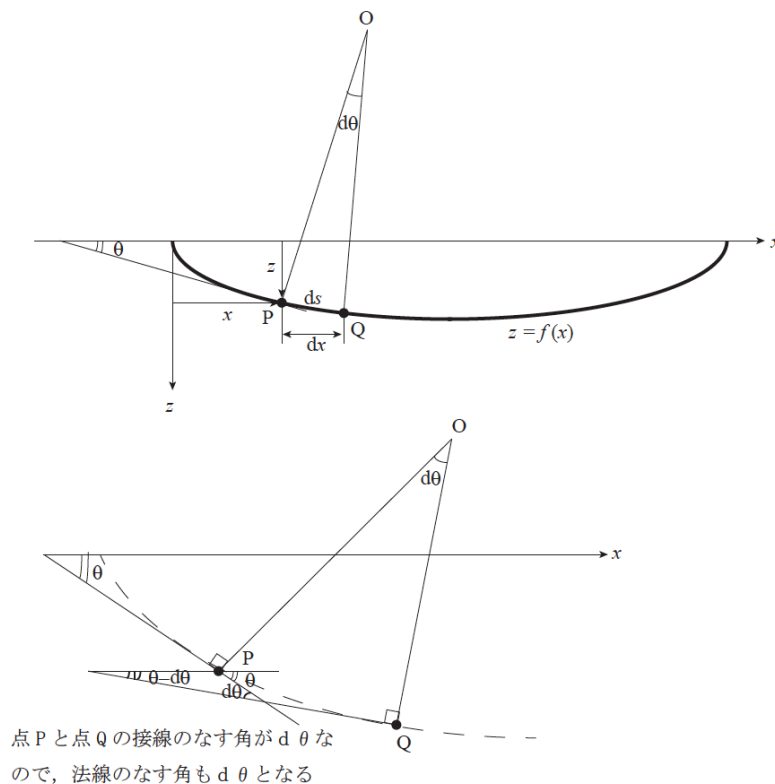


図 4 撓み曲線

曲線 $\widehat{PQ}(=ds)$ は撓み曲線上の微小線素であり、曲線 $\widehat{PQ}$ の曲率半径を ρ 、曲率の中心を O とすると、 $\angle POQ$ は、 P, Q 点間の撓み角 θ の差 $d\theta$ に等しく、

$$\begin{aligned} ds &= -\rho d\theta \\ \therefore \frac{1}{\rho} &= -\frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、(21)式に負号を付けたのは、点 P から点 Q に移動するにつれて撓み角 θ が減少し、正の ds に対して、 $d\theta$ が負になるから、正の値にするために付けたものである。

また、点 P のおける撓み角 θ のタンジェントは、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{dz}{dx} \\ \therefore \theta &= \tan^{-1} \frac{dz}{dx} \end{aligned} \quad (22)$$

と表されるので、これを (21) 式に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= -\frac{d\theta}{dx} \times \frac{dx}{ds} \\ &= -\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{dz}{dx} \right) \times \frac{dx}{ds} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{dz}{dx} \right) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) \\ &= \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

また、曲線の弧長 s は $s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} dx = \int ds$ なので、

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} dx \\ \therefore \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}} \end{aligned} \quad (25)$$

(24)式と(25)式を(23)式に代入すると、

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (26)$$

となる。一般に、弾性変形の範囲は、 z は微小量なので、1 に対して $\left(\frac{dz}{dx} \right)^2$ は無視できるので、(26) 式は次のように近似できる。

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (27)$$

一方、(12)式より、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y} \quad (28)$$

となるので、(27)式と(28)式を等置して、

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{M}{EI_y} \quad (29)$$

これが梁の撓みを求める微分方程式となる。(29)式を順次、積分して、

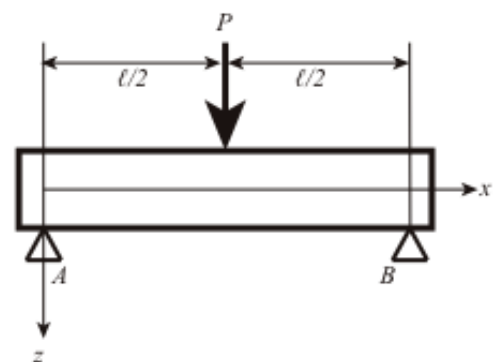
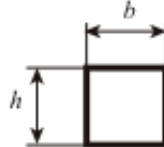
$$\theta = \frac{dz}{dx} = - \int \frac{M}{EI_y} dx + C_1 \quad (30)$$

$$z = \int \theta dx = - \iint \frac{M}{EI_y} dx dx + C_1 x + C_2 \quad (31)$$

により撓み角 θ や撓み z を求めることができる。

3. 梁の問題 3

図 5 に示す対称 3 点曲げについて、以下の問いに答えよ。ただし、梁は幅 b 、厚さ h 、長さ ℓ とし、 $\ell/2$ の位置に荷重 P が負荷されているとする。



(1) 支点 A および B の反力 R_A 、

R_B を求めよ。

(2) SFD および BMD を示せ。

(3) 曲げ応力 $\sigma(x, z)$ の分布を求めよ。

(4) 最大引張り応力 $\sigma_{\max}$ を求めよ。

(5) 剪断応力 $\tau(x, z)$ の分布を求めよ。

図 5 対称 3 点曲げ

(6) 最大剪断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ.

4. 梁の問題 4

図 6 に示す非対称 3 点曲げについて, 以下の問いに答えよ. ただし, 梁は幅 b , 厚さ h , 長さ ℓ とし, 左端から a の位置に荷重 P が負荷されているとする.

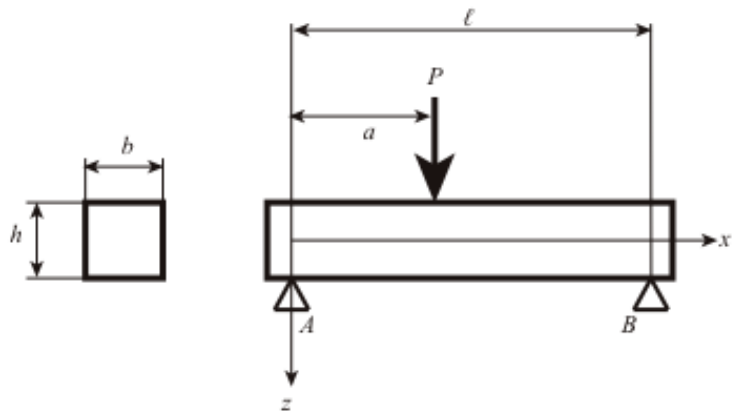


図 6 非対称 3 点曲げ

(1) 支点 A および B の反力 R_A , R_B を求めよ.

(2) SFD および BMD を示せ.

(3) たわみ角 $\theta(x)$ およびたわみ $\delta(x)$ を表す式を求めよ. ただし, ヤング率を E とせよ.

(4) 荷重点変位 δ_P を求めよ.

(5) 最大変位 $\delta_{\max}$ を求めよ.

(6) $a = \ell/2$ の時 (すなわち, 対称 3 点まげ) の荷重点変位 δ_P を求めよ,

(7) 対称 3 点曲げの時の荷重点変位 δ_P からヤング率 E を求める式を導け.