

第9回 軸のねじり，梁の曲げ 1

無機材料工学科

准教授 安田公一

1. はじめに

今回は、軸のねじりの問題と、梁の曲げに関する SFD と BMD の問題を具体的に解いて、理解を深めることにする。

2. 軸のねじりの問題

直径 0.4m，毎分回転数 60 の船舶用プロペラ軸のねじれ角を測ったところ，長さ 10m のプロペラ軸に対して 1° であった．この軸に生じているねじり応力，加わっているトルクおよび伝達馬力を求めよ．ただし，剛性率は 80GPa とする．

3. 梁の曲げの基本事項 1

3. 1 剪断力図 SFD・曲げモーメント図 BMD

梁の曲げには、剪断力と曲げモーメントという概念がでてくるが、これらがよく理解されないままに、剪断力図 SFD や曲げモーメント図 BMD の話になっていってしまっている感もあるので、この点を、再度、確認する．なお、以下、 P ， σ ， τ は正のスカラー量を表しているものとする．

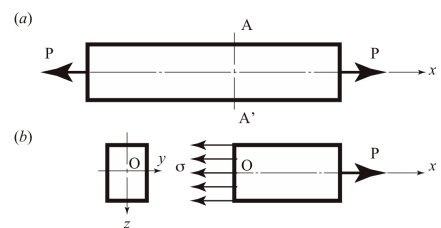


図1 棒の引張り

図1(a)は、断面積 A の棒に引張り荷重 P が負荷されている状況であるが、この棒を AA' 断面で仮想的に切って、右側の物体の自由物体線図を書くと、図1(b)のようになる．この棒が釣り合っているためには、棒の右端に作用する引張り荷重 P と釣り合うように、内力としての垂直応力 σ が仮想断面 AA' に生じ、その合応力が引張り荷重 P と釣り合わなければならない．すなわち、

$$\begin{aligned} P + \int_A (-\sigma) dA &= 0 \\ P - \int_A \sigma dA &= 0 \\ \therefore P &= \int_A \sigma dA \quad (1) \end{aligned}$$

となる．ここで、垂直応力 σ が横断面 AA' に均一に分布すれば、 AA' 断面の中心 O を通る y 軸に関する力のモーメントの釣り合いも、引張り荷重 P と垂直応力 σ の合応力

とで自動的に保たれるようになる。このような垂直応力 σ は、

$$\begin{aligned} P - \sigma \int_A dA &= 0 \\ P - \sigma A &= 0 \\ \therefore \sigma &= \frac{P}{A} \end{aligned} \quad (2)$$

と言う大きさを持つ。

次に、図 2(a)のような長さ ℓ の片持ち梁（一端を固定、もう一つの端には横荷重 P を負荷）の場合を考えてみる。同じように、仮想断面 AA' で切って、右側の部分の自由物体線図を書くと、図 2(b)および図 2(c)のようになる。まず、 z 軸方向の力の釣り合いを考えると、図 2(b)のように、荷重 P と釣り合うように、内力としての剪断応力 τ が仮想断面 AA' に生じ、その合応力が荷重 P と釣り合わなければならない。 z 軸下向きを正の方向とするので、

$$\begin{aligned} P + \int_A (-\tau) dA &= 0 \\ P - \int_A \tau dA &= 0 \\ \therefore P &= \int_A \tau dA \end{aligned} \quad (3)$$

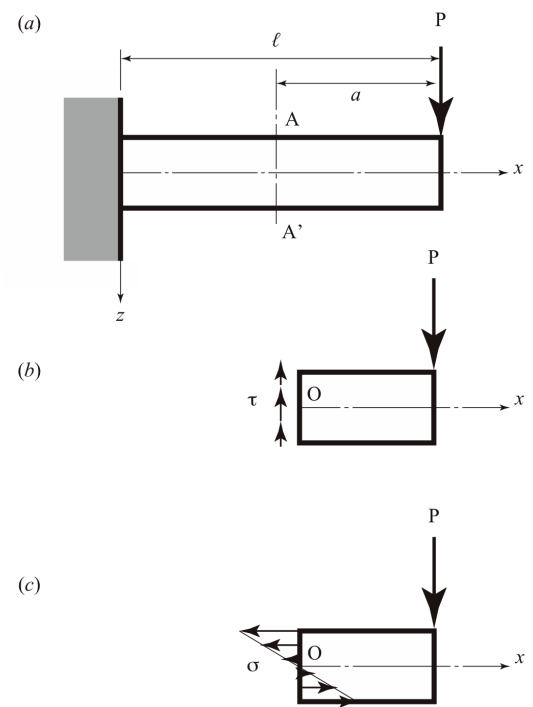


図2 片持ち梁

となる。しかし、この剪断応力だけでは、 y 軸に関する力のモーメントの釣り合いが保たれない。なぜならば、 AA' 断面の中心 O を通る y 軸に関する荷重 P の力のモーメントは $-Pa$ であり（反時計回りのモーメントを正とする）、剪断応力 τ によるモーメントの寄与はないからである。そこで、 AA' 断面には、図 2(c)のように垂直応力 σ も生じることになる。この場合の力のモーメントの釣り合いは

$$\begin{aligned} -Pa + \int_{A(z \geq 0)} (+z)(+\sigma) dA + \int_{A(z < 0)} (-z)(-\sigma) dA &= 0 \\ -Pa + \int_A z \sigma dA &= 0 \\ \therefore Pa &= \int_A z \sigma dA \end{aligned} \quad (4)$$

とならなければならない（ここでの曲げ応力 σ の正負は引張り・圧縮の正負ではなく、 x 軸に対する正負となることに注意する）。ここで、図 2(c)のように、引張り応力と

圧縮応力が 1 次関数的に分布すれば、その x 軸方向の合応力はゼロとなり、 x 軸方向の力の釣り合いも自動的に満たされる。この垂直応力を曲げ応力という。

このようにして、梁に横荷重 P が作用すると、任意の断面には、剪断応力 τ と曲げ応力（垂直応力） σ という内力が生じる。そして、剪断応力 τ の合応力を剪断力と呼んで Q と表す。また、曲げ応力 σ による合モーメントを曲げモーメントと読んで M で表す。

ただし、剪断力と曲げモーメントの符号については、次のように定義する。仮想断面の外向き法線が x 軸の正の方向を向いている場合、剪断力 Q が z 軸の正の方向を向いている場合を正の剪断力とする。また、 z 軸の正の方向に梁が凸にたわむような曲げモーメント M を正の曲げモーメントとする。これらを図示すると、図 3 のようになる。

この符号の規則を図 2 の片持ち梁に適用すると、AA' 断面は外向き法線が x 軸の負の方向を向いていて、剪断応力の合応力が z 軸の負の方向を向いているので、この場合の剪断力は正となる。また、曲げ応力の合モーメントは、この梁を z 軸の負の方向に凸にたわめるので、負の曲げモーメントとなる。その結果、

$$Q = P \quad (5)$$

$$M = -Pa \quad (6)$$

となる。さらに、通常は、曲げモーメントは、梁の左端を x 軸の原点とし、そこからの距離 x で断面の位置を表すので、

$$Q = P \quad (7)$$

$$M = -P(\ell - x) \quad (8)$$

となり、これらを図示すると、図 4 のようになる。この場合、剪断力 Q は断面の位置に関わらず、常に P であり、曲げモーメント M は荷重点で 0、固定端で $-P\ell$ となり、その間を線型的に変化している。このような剪断力と曲げ応力の分布を剪断力図 SFD、曲げモーメント図 BMD と呼ぶ。

なお、剪断力 F や曲げモーメント M は内部応力の合力・合モーメントとして定義

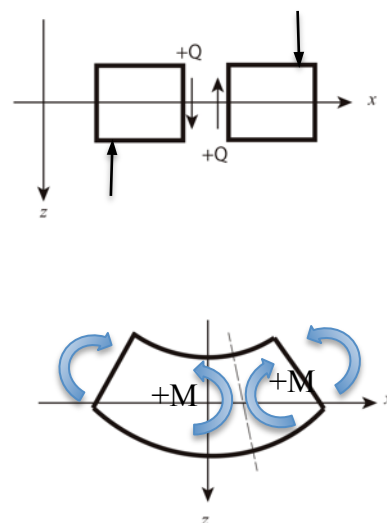


図 3 剪断力と曲げモーメントの符号

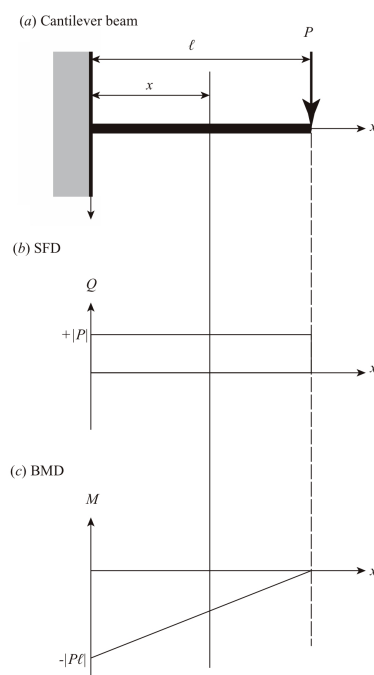


図 4 SFD と BMD

したが、上記のように符号を定義すると、剪断応力 τ や曲げ応力 σ が生じていることを省略して、仮想断面に、直接、そのような剪断力 F と曲げモーメント M が外力の作用で発生したと見なすこともできる。

3. 2 分布荷重 $q(x)$ と剪断力 $Q(x)$ との関係、剪断力 $Q(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ の関係

図5に示したように、分布荷重 $q(x)$ が作用する梁の微小要素 dx を考え、自由物体線図を作ってみる。この時、2つの仮想断面に作用する剪断力と曲げモーメントは、それぞれ、正の値を持っているとして図5のように仮定する（図3の定義を参照。梁の端面ではなく、仮想断面における正の方向で考える）。

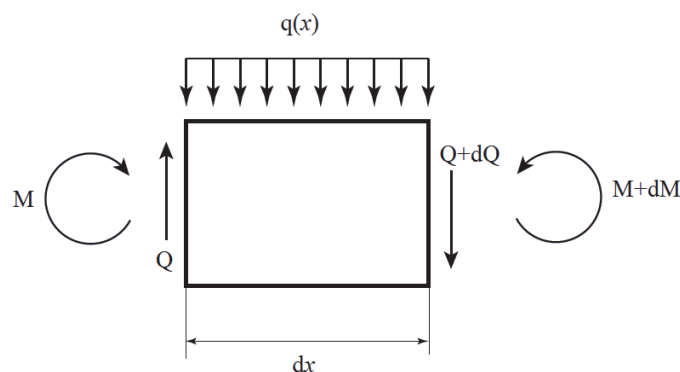


図5 微小部分のつりあい

この微小要素に作用している力のつりあいから、

$$\begin{aligned} (Q + dQ) - Q + q(x)dx &= 0 \\ \therefore \frac{dQ(x)}{dx} &= -q(x) \end{aligned} \quad (9)$$

という関係が得られる。これは、分布荷重 $q(x)$ と剪断力 $Q(x)$ との関係を示している。次に、右側の仮想断面上の任意の点周りのモーメントのつりあいから、

$$\begin{aligned} (M + dM) - M - Qdx + q(x)dx \times \frac{dx}{2} &= 0 \\ \therefore \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $(Q + dQ)$ はモーメントの中心を通る力なので、モーメントに寄与せず、また、2次の微量 $(dx)^2$ は無視した。前節で説明した SFD と BMD について、(9)式と(10)式の関係式が成立していることを確認してみると、検算することができる。なお、 x 軸の原点の位置（および、それに伴って、軸の向き）によって、(9)、(10)式の右辺の符号が逆転した形式で整理された教科書もあるので、注意すること。

4. 梁の問題 1

図 6 に示す対称 3 点曲げについて、以下の問いに答えよ。ただし、梁は幅 b 、厚さ h 、長さ ℓ とし、 $\ell/2$ の位置に荷重 P が負荷されているとする。

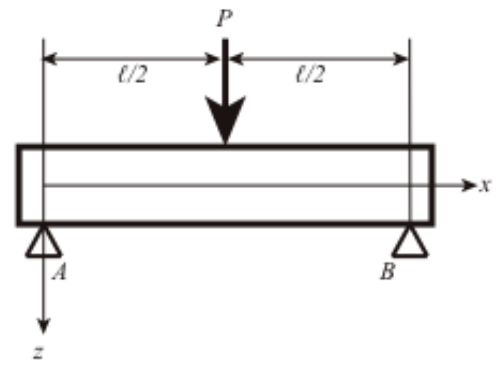
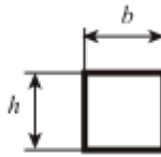


図 6 対称 3 点曲げ

- (1) 支点 A および B の反力 R_A , R_B を求めよ。

- (2) SFD および BMD を示せ。

5. 梁の問題 2

図 7 に示す非対称 3 点曲げについて、以下の問いに答えよ。ただし、梁は幅 b 、厚さ h 、長さ ℓ とし、左端から a の位置に荷重 P が負荷されているとする。

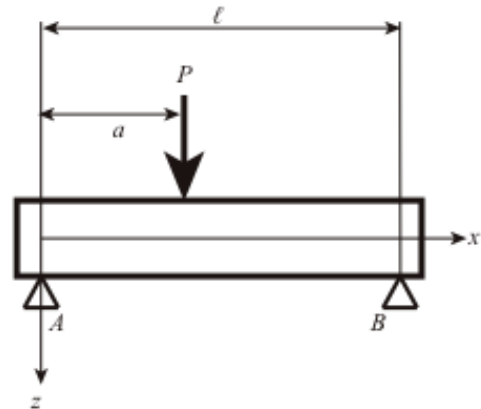
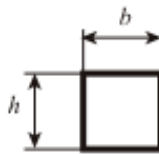


図 7 非対称 3 点曲げ

- (1) 支点 A および B の反力 R_A , R_B を求めよ。

- (2) SFD および BMD を示せ。