講義名　連続体力学　配付資料　OCW-i

第 6 回　材料力学における応力テンソル

無機材料工学科

准教授　安田公一

１．はじめに

今回は，応力テンソルに関する材料力学的な定義を解説する．また，その応用としてモールの応力円について議論する．

２．応力テンソルから応力ベクトルの成分を求める．

ここでは，材料力学における応力テンソルの考え方を導入する．簡単のため，2 次元問題について考える．内部応力状態の単位厚さの物体があり，その中の任意の点 P での応力テンソルの成分 σ_x，σ_y，τ_{xy} が既知であるとする．図 1 に示すように，点 P の近傍に点 B と点 C を取り，微小 3 角柱 PBC を考える．この三角柱の斜面 BC を点 P における仮想断面とみなす．

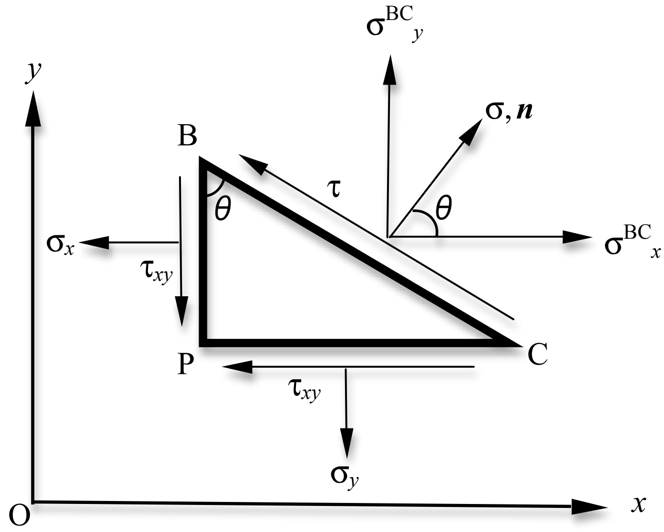

図 1　微小体積における釣り合い

仮想断面の法線を $\boldsymbol{n}$ とし，$\boldsymbol{n}$ と x 軸とのなす角を θ とする．仮想断面 BC における応力ベクトルを．法線方向の成分を σ，平行方向の成分を τ とする．また，この斜面 BC の応力ベクトルを x 軸方向と y 軸方向に分解した成分を σ^{BC}_x，σ^{BC}_y とする（σ と τ とのベクトル和を x 軸方向と y 軸方向に分解したものを意味する．σ だけを分解したのではない）．

法線 $\boldsymbol{n}$ の方向余弦は，$\left(\cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるので，仮想断面 BC の面積を S とすれば，面 PB（x 軸に垂直な面）の面積は $S\cos\theta$，面 PC（y 軸に垂直な面）の面積は $S\sin\theta$ となる．

まず，x 軸方向，y 軸方向の力の釣り合いを考えると，

$$\begin{cases}\sigma_x^{BC}\cdot S-\sigma_x\cdot S\cos\theta-\tau_{xy}\cdot S\sin\theta=0\\ \sigma_y^{BC}\cdot S-\sigma_y\cdot S\sin\theta-\tau_{xy}\cdot S\cos\theta=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\sigma_x^{BC}=\sigma_x\cos\theta+\tau_{xy}\sin\theta & (1)\\ \sigma_y^{BC}=\sigma_y\sin\theta+\tau_{xy}\cos\theta & (2)\end{cases}$$

となる．このように，応力テンソルの成分が既知であれば，任意の法線を持つ仮想断面における応力ベクトルの成分を計算することができる．

３．応力テンソルの変換則

前節の結果を用いて，法線方向の成分σ，平行方向の成分τを求めてみる．図1を参照して，方向余弦をかけてから，足し合わせると，

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x^{BC}\cos\theta + \sigma_y^{BC}\sin\theta \\ &= \left(\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta\right)\sin\theta \\ &= \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau &= -\sigma_x^{BC}\sin\theta + \sigma_y^{BC}\cos\theta \\ &= -\left(\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta\right)\sin\theta + \left(\sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta\right)\cos\theta \\ &= \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\theta\cos\theta \qquad (4)\end{aligned}$$

となる．なお，これらの式は，

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (5)$$

と表すことができ，$\sigma_{x'}$がσに．$\tau_{x'y'}$がτに対応する．$\sigma_{y'}$は$\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$の角度を持つ斜面における法線方向成分を表し，

$$\sigma_{y'} = \sigma_x\sin^2\theta + \sigma_y\cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (6)$$

となるが，これは，(3)式に，$\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$，$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$を代入すると得られることがわかる．(5)式のように，方向余弦を 2 回かけて変換する変数を 2 階テンソルという．すなわち，任意の斜面の法線方向成分と平行方向成分を求めるということは，$(x,\ y)$座標系での応力テンソル成分から，θ回転した$(x',\ y')$座標系での応力テンソルの成分を求めることと同じことになっている訳である．

なお，$(x',\ y')$座標系での応力テンソルの成分の正負は．$(x',\ y')$座標系の座標軸に対して定まっているので，変換後の応力テンソルの成分を変換前の$(x,\ y)$座標系で，正負の議論をしないように注意すること．

＜演習１＞　(3)式, (4)式, (6)式が次のように表されることを示せ．

$$\sigma_\theta = \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (7)$$

$$\tau_\theta = \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (8)$$

$$\sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (9)$$

＜演習２＞　角度θの仮想断面における剪断応力成分をτ_θとするとき，角度$\theta+\pi/2$の仮想断面における剪断応力成分$\tau_{\theta+\frac{\pi}{2}}$が，$\tau_{\theta+\frac{\pi}{2}}=-\tau_\theta$という関係にあることを示せ．

＜演習３＞　$\sigma_x=160\mathrm{MPa}, \sigma_y=20\mathrm{MPa}, \tau_{xy}=-20\mathrm{MPa}$とした時，角度$\theta$に伴う$\sigma_\theta$と$\tau_\theta$の変化を$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$から$\theta=\dfrac{\pi}{2}$の範囲で示せ．

４．主応力

さて，(4)式より，剪断応力τがゼロとなる方向θがあることがわかる．$\tau=0$として整理すると，

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{\frac{1}{2}\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{1}{2}\tan2\theta \qquad (10)$$

となる．ある角度θ_0で(10)式が成り立てば，$\theta_0\pm\dfrac{\pi}{2}$でも成り立つので，直交する２つの方向で$\tau$が０になることがわかる．これらの方向を主方向とよび，このときの垂直応力を主応力と呼ぶ．

主方向がx軸，y軸と一致する場合は，τ_{xy}はゼロになるので，(3)式，(4)式は，

$$\begin{cases}\sigma=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta & (11)\\ \tau=-\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin2\theta & (12)\end{cases}$$

となり，さらに，σ_yがゼロならば，

$$\begin{cases}\sigma=\sigma_x\cos^2\theta & (13)\\ \tau=-\dfrac{1}{2}\sigma_x\sin2\theta & (14)\end{cases}$$

となり，前回のプリントの(7)式，(8)式と一致する．

５．応力テンソル成分の符号

応力テンソルには，添え字が２つ付いているが（σ_xはσ_{xx}を略記したもの），第１の添え字が対象としている面の外向き面法線の方向を表し，第２の添え字がその面に作用している力の方向を表している．外向き面法線が座標軸の正の方向を向いている場合，力の方向も座標軸の正の方向の向いているテンソルの成分を正とする．したがって，外向き面法線が座標軸の負の方向を向いている場合，力の方向が座標軸の負の

方向の向いているテンソルの成分も正となる．図２に，応力テンソルの成分が正となる場合を図示した．

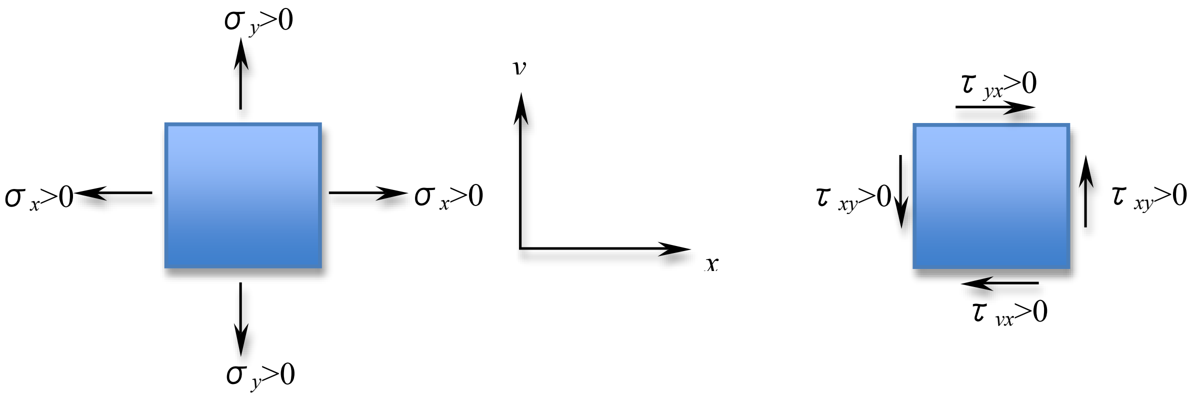

図 2　応力テンソルの成分の符号

応力テンソルの成分を応力ベクトルの成分と同一視して，力の釣り合いやモーメントの釣り合いを考える場合は，応力テンソルの値は絶対値として考え，正負の符号は，設定した座標軸に対して適切に与えなければならない．例えば，力の釣り合いでいうと，図 2 の左のσ_xについては，右向きのσ_xは正の応力，左向きのσ_xは負の応力として，$(+\sigma_x)+(-\sigma_x)=0 \longrightarrow \sigma_x=\sigma_x$という扱い方になる．同様に，モーメントの釣り合いでいうと，図 2 の右のτ_{xy}とτ_{yx}については，半時計回りの回転を正の回転とすると，τ_{xy}は正のモーメントを与え，τ_{yx}は負のモーメントを与えるので，$(+\tau_{xy})+(-\tau_{yx})=0 \longrightarrow \tau_{xy}=\tau_{yx}$という扱い方になる（このような関係を持つ剪断応力テンソルの成分を共役剪断応力テンソルと呼ぶ）．

６．モールの応力円

６．１　主応力が与えられた時

主応力状態$(\sigma_x, \sigma_y, 0)$が既知であった時，主軸である x 軸から$+\theta$ (>0)の角度だけ半時計回りに回転した方向に法線を持つ仮想断面を考える．この仮想断面における垂直応力テンソルσと剪断応力テンソルτは，(11)式と(12)式に基づいて代数的に計算することもできるが，これを図的に求める方法がモールの応力円である．

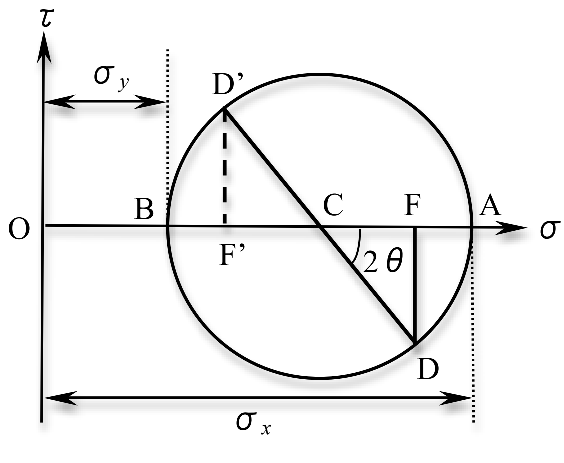

図 3　モールの応力円

横軸にσを，縦軸にτを取ると図 3 のようになる．まず，主応力であるσ_xとσ_yを横軸上（σ軸上）にプロットして（ここでは，$\sigma_x > \sigma_y$とする），図 4 中の点 A と点

B を得る．この 2 点を直径とする円を描き，図 1 での角度 θ (>0)と逆の回転方向に（すなわち時計回りに），図 3 の円周上の角度 2 θ の位置に点を取り，点 D とする．すると点 D の座標（OF, -FD）は，

$$
\begin{aligned}
OF &= OC + CF \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\sigma_x}{2}\left(1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \frac{\sigma_y}{2}\left(1 - \cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\sigma_x}{2}\left(2\cos^2\theta\right) + \frac{\sigma_y}{2}\left(2\sin^2\theta\right) \\
&= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta \\
&= \sigma \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-FD &= (-1) \times CD \sin 2\theta \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta \\
&= \tau \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となり，点 D の座標が，丁度，（σ，τ）となっていることがわかる(ここで，FD に -1 が付いているのは，D 点が τ 軸上，負の値になっているので，FD の大きさに-1 をかけて座標の値にしているためである)．FD の大きさ自体では，(16)式の計算から，- τ になって符号が変わってしまうので，図 1 での角度 θ と逆の回転方向に，図 3 では 2 θ 回転して，点 D を第 4 象限にプロットし，剪断応力の符号を合わせるようにしていることになる．このことは．θ が増えると，(16)式の τ がマイナス方向に変化していくことを考えれば理解できると思う．

点 D の対象点である D'は，角度が（2 θ + π）になっているので，図 1 の斜面 BC をさらに 90°回転した仮想断面（$\theta + \pi/2$）での応力状態を示す（ただし，応力テンソルの成分の正負は，（$\theta + \pi/2$）回転した(x''，y'')座標系での座標軸を基準にして考えると言うことに注意）．すなわち，D'点の座標（OF',F'D'）が斜面 BC をさらに 90°回転した斜面での垂直応力 σ' と剪断応力 τ' を表している．

最大の剪断応力は，応力円の半径で与えられるので，

$$
\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad (16)
$$

となり，これは，$\theta = \pm\pi/4$ の点に対応し，2 つの主

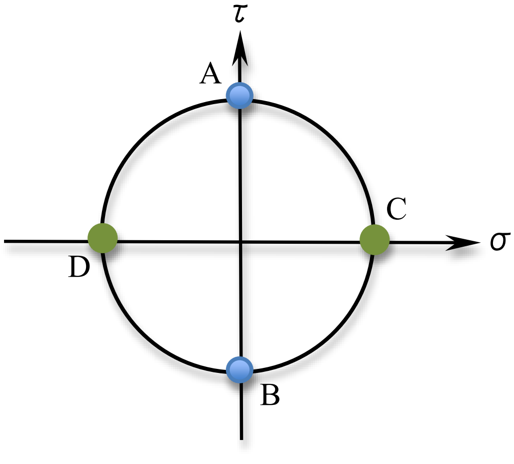

図 4　純粋剪断応力状態

応力の間の角を 2 等分する点に生じる.

６．２　純粋剪断応力状態

純粋剪断応力状態では，垂直応力がゼロとなるので，$(0, \tau_{xy})$と$(0, -\tau_{xy})$の 2 点（図 4 中の点 A と点 B）をプロットし，その 2 点を通る円を描けば，モールの応力円になる．この応力円は点 C と点 D でσ軸と交わるので，この点 C と点 D の座標が純粋剪断応力状態の主応力を与える．この主応力は，大きさが同じで，一つは引張り応力(C 点), もう一つは圧縮応力(D 点)になっている. 点 A から点 C まで角度で-90°なので，点 A の剪断応力がかかっている面から+45°座標軸を回転した方向に，この引張り応力（主応力）が負荷されていて，点 A から-45°座標軸を回転した方向に圧縮応力（主応力）が負荷されている．この応力状態は純粋剪断応力状態と等価となる.

６．３　一般の応力状態

応力状態 $\left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right)$で与えられる一般の応力状態の場合も，モールの応力円の円周上に乗っていることには変わりないので，この場合も次のような手順で，モールの応力円を作図することができ，そこから主応力を求めたり，任意の法線を持つ面での応力テンソルの成分を図的に求めることができる.

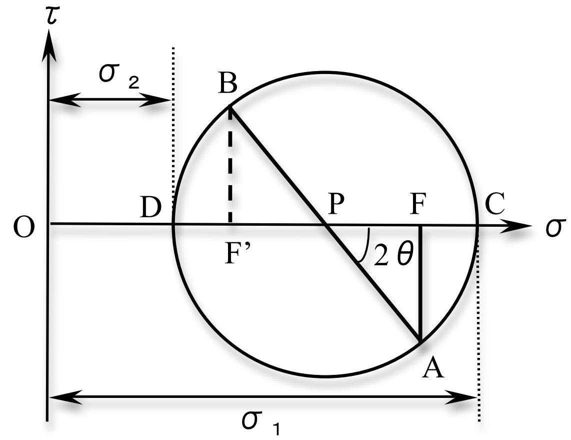

図 5　モールの応力円

①σ_xが作用している面の剪断応力τ_{xy}の符号が既知であるとする．例えば，この場合は負であるとする（$\tau_{xy}<0$）.

②（σ，τ）図上において，(σ_x, τ_{xy})をプロットする．この場合，OF がσ_x，FA がτ_{xy}に相当し，点 A が得られる.

③次に，σ_yに関するプロットをするのであるが，元々，この応力状態を計った時の(x, y)座標系でみれば，σ_yが作用している面の剪断応力τ_{yx}も，σ_xが作用している面の剪断応力τ_{xy}と同じ負の剪断応力であるが，モールの応力円のプロットは，テンソルの変換則に基づいているので，σ_yを知るために，座標系を+90°回転させているため, 新しい座標系(x', y')での剪断応力は正負の符号が変わることになる. その結果，σ_yに対応する点をプロットするときには，剪断応力の符号を変えて，$(\sigma_y, -\tau_{xy})$をプロットする．この場合，OF’がσ_y，F’B が$-\tau_{xy}$に相当し，点 B が得られる.

④線分 AB とσ軸の交点 P がモールの応力円の中心 P になるので，線分 AP を半径

にしてモールの応力円を描く.

⑤σ 軸とモールの応力円の交点 C と D が主応力の値を与える.

⑥σ_x の方向（すなわち，x 軸）を法線とする面を表している点 A から，主応力に対応する点 C までの角度は$+2\theta$ なので，現在の x 軸から$-\theta$ の方向に座標軸を回転した方向が主応力の方向になる.

⑦さらに，現在の応力状態において，（x，y）座標系を$+\phi$ 回転した時の応力状態を求める場合には．現在の応力を表している A 点から-2ϕ 回転した点の座標を求めて，その時の σ と τ を求めればよい.

なお，今回，説明したのが最も古典的なモールの応力円のプロットの仕方であるが，座標軸の回転方向とモールの応力円周上での回転方向が逆回転になるのを嫌って，以下のような流儀もある.

①モールの応力円に限って，剪断応力の正負の定義を逆にするというやり方．こうすると，図 4 と同じ σ/τ 軸を使うことができ，かつ，座標軸の回転方向とモールの応力円周上の回転方向が同じになる.

②剪断応力の定義は通常の定義のままとするが，σ/τ プロットの τ 軸の正の方向を下方に取るようにするやり方．こうすると，剪断応力の定義は変えずに，座標軸の回転方向とモールの応力円周上の回転方向が同じになる.

そして，もう一つの流儀が今回説明したものである．今回説明したやり方は，回転方向が逆になるので，混乱しやすいこともあるが，応力テンソルの変換則の原理に一番対応した形なので，このやり方を採用することにした.

＜演習４＞　内部応力状態の物体のある点を応力状態を調べたら，右図のようになった.

① モールの応力円を描き，２つの主応力と最大剪断応力を求めよ.

② （x，y）座標系を+40°回転させた場合の応力テンソルの成分を求めよ.