第 5 回　材料力学における応力ベクトル

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．はじめに

今回から 5 回の講義で，材料力学を復習する．まず，第 1 回目の今回は，応力ベクトルについて議論する．

２．応力ベクトルの定義

材料力学では，図 1(a)に示すように，均一断面積 S を有する棒状試験片の両端面に垂直に引張り力（あるいは引張り荷重）F が作用したとき，荷重軸に垂直な断面には，次式で定義される応力σが作用していると考える．

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad (1)$$

このように言うと，応力σがスカラーであるかのごとく聞こえてしまうが，厳密に言うならば，図 1(b)に示したように，均一断面積 S を有する棒状試験片の両端面に垂直に引張り力ベクトル（あるいは引張り荷重ベクトル）***F*** が作用したとき，荷重軸に垂直な断面には，次式で定義される応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ が作用しているとすべきである．

(2)

（ａ）材料力学での応力　（ｂ）応力ベクトル　（ｃ）均一断面では位置によらない（端面から十分離れた位置においては）

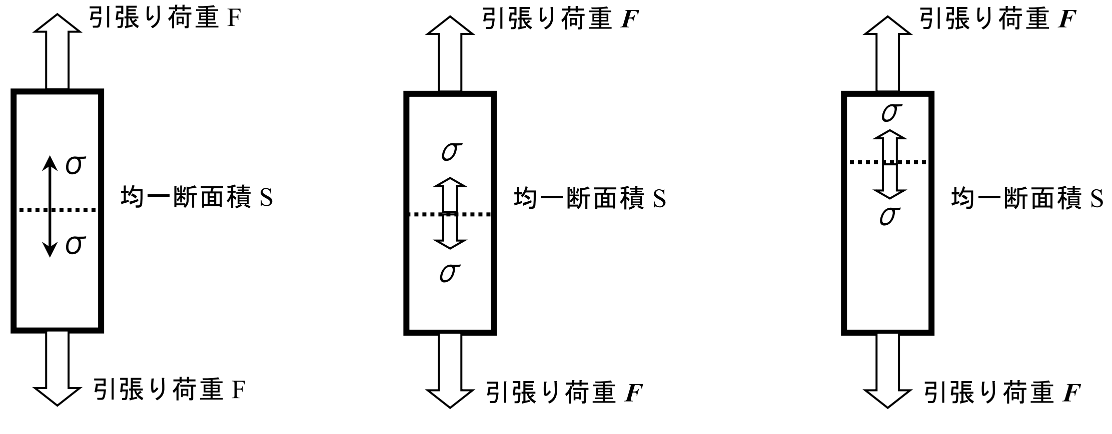


図 1　材料力学における応力概念

均一断面であるので，図 1(c)に示すように，荷重軸に垂直な断面に作用する応力ベクトルは，両端面からある程度離れれば，断面の位置によらず均一分布となっていると見なせる（これを，サンブナンの原理という）．

次に，図１を力の釣り合いの観点から考察してみる．図２(a)に示すように，この棒状試験片には，上方向への引張り荷重ベクトル $\boldsymbol{F}_1$ が作用しているが，それと同時に，同じ大きさで逆向きの下方向への引張り荷重ベクトル $\boldsymbol{F}_2$ が作用しているので，両方の力が相殺されて（$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0}$，すなわち，$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2$），ニュートンの運動方程式($m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$)より，棒状試験片は加速度運動($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$)を起こさず，静止していることになる．逆に言えば，静止している物体は，図２の $\boldsymbol{F}$ ベクトルのような表面に作用する表面力（面力，トラクションともいう）と，重力や遠心力のような物体の単位体積当たりに作用する体積力を全てたしあわせると，力としては相殺しているはずである．

３．自由物体法

次に，棒状試験片の内部の釣り合いを考えてみる．図２に示した任意の断面で仮想的に試験片を切断し，上の部分だけを取り出して考えてみると，上向きに引張り荷重ベクトル $\boldsymbol{F}_1$ が，下向きに $\sigma_1 S$ で計算される力ベクトル（応力ベクトルの定義から）が作用し，$\boldsymbol{F}_1+\sigma_1 S=\boldsymbol{0}$ となっているため，この部分は力が釣り合っていて，静止していることがわかる．同様に，仮想的な切断面の下の部分も，下向きに引張り荷重ベクトル $\boldsymbol{F}_2$ が，上向きに $\sigma_2 S$ で計算される力ベクトル（応力ベクトルの定義から）が作用し，$\boldsymbol{F}_2+\sigma_2 S=\boldsymbol{0}$ となっているため，この部分も力が釣り合っていて，静止していることがわかる．だから，物体内の微小体積要素がどこかに飛んでいってしまわないで，１つの物体として安定した形状を保っている訳である．

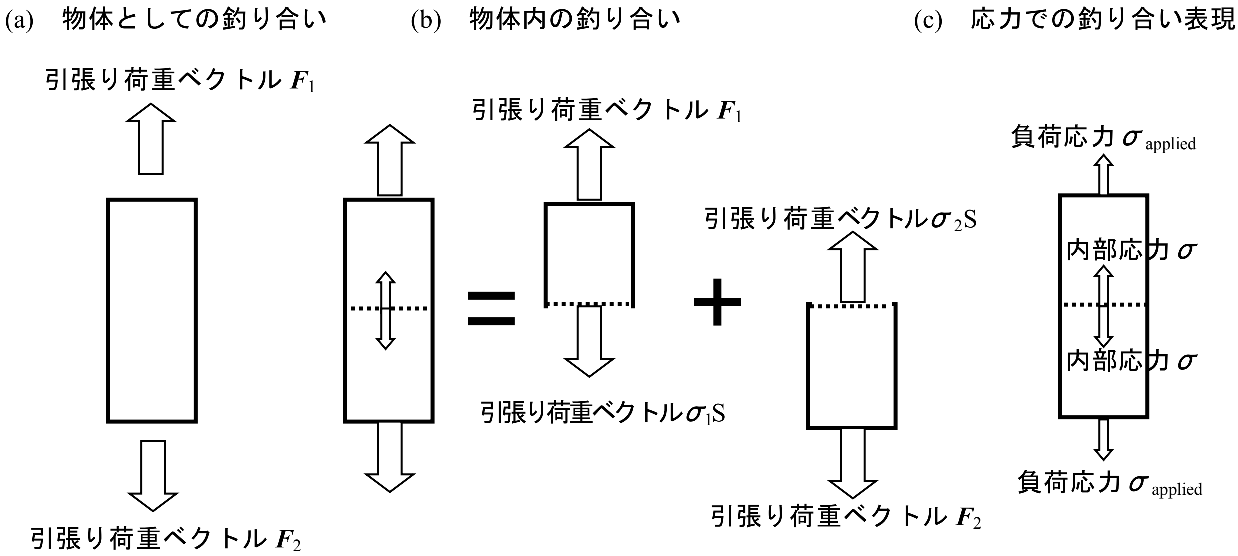


図２　力の釣り合い

なお，実際の試験では，我々は試験片に荷重ベクトルを負荷するのであるが，考察する時には，引張り荷重ベクトル $\boldsymbol{F}$ を均一な断面積 S で割って，応力の次元にしたものを，新たに，負荷応力ベクトル $\sigma_{\mathrm{applied}}$ と定義し，この負荷応力ベクトル $\sigma_{\mathrm{applied}}$ と棒状試験片内の内部応力 σ とが釣り合っているという言い方をすることの方が多い．上記の物体内の釣り合いを一般化すると，次のように言うことができる．

『力の釣り合いにある物体があったとする．その物体に仮想的な断面を入れて，物体の一部だけを取り出すと，取り出した物体に作用する面力（物体力があれば物体力も）を全て足し合わせるとゼロになる．このような考え方を自由物体法（あるいは，自由物体線図を作る）と言い，これにより．未知の面力を推定することができる．運動の自由度が 1 方向の直線運動だけでなく，平面内の運動であれば，2 方向の直線運動に分解して，どちらの方向にも力の釣り合いが成り立っているはずである．さらに，回転の自由度があれば，力のモーメントの釣り合いも成り立たなくてはならない．』

自由物体法を用いると，トラス（図 3 のように，滑節(hinged joint)，回転支点(hinged support)，移動支点(movable support)のみを含み，まっすぐな部材からなって，部材には引張りと圧縮の軸力しか作用しない骨組み構造のこと．剛節(rigid joint)や固定支点(fixed support)も含み，部材に軸力以外に曲げ荷重もかかる骨組み構造をラーメンという）の部材にかかる軸荷重が簡単に解ける．

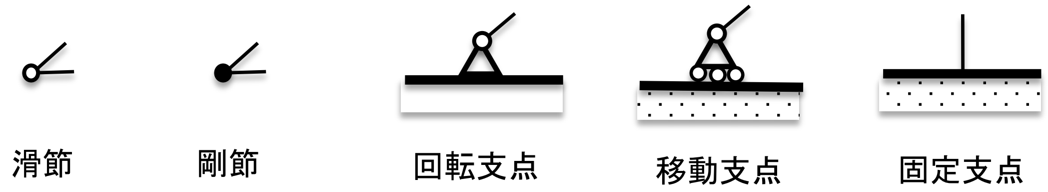


図３　骨組み構造における節点と支点の種類

＜例題１＞　5本の棒で図4に示したトラスを作り，棒 AC に直角に点 B と点 D に荷重 P を作用させたときの各部材にかかる軸荷重を求めよ．

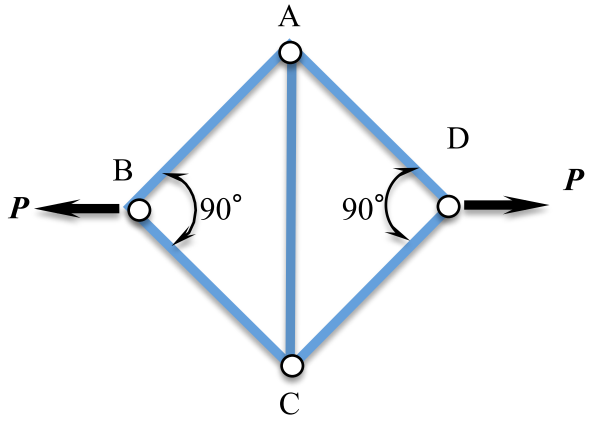
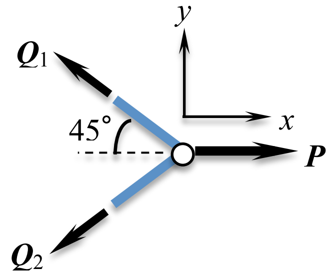


図４　トラス問題

講義名　連続体力学　配布資料　OCW-i

（解答例）　棒 AD が節点 D に作用する荷重を $\boldsymbol{Q}_1$，棒 CD が節点 D に作用する荷重を $\boldsymbol{Q}_2$ と置き，節点 D 付近の部材を自由物体として取り出してくると，下図のようになる．図のように(x,y)座標を導入して，力の釣り合いを書くと，

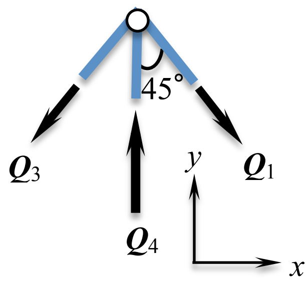


$$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{0} \longrightarrow \begin{cases} P-Q_1\cos 45^\circ - Q_2\cos 45^\circ = 0 \\ Q_1\sin 45^\circ - Q_2 \sin 45^\circ = 0 \end{cases}$$

第 2 式より，$Q_1 = Q_2$ となり，これを第 1 式に代入すると，

$P = 2\times Q_1\dfrac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow Q_1 = \dfrac{P}{\sqrt{2}}$ となる．

次に，節点 A 付近の部材を自由物体として取り出し，棒 AD が節点 A に作用する荷重を $\boldsymbol{Q}_1$（正確に言えば，節点 D の議論における荷重 $\boldsymbol{Q}_1$ とは逆向きなので，- $\boldsymbol{Q}_1$ すべきであるが，そうすると徒に表記が複雑になるので，ここでは，切り離して考えることにするが），棒 AB が節点 A に作用する荷重を $\boldsymbol{Q}_3$ と置く．次に棒 AC が節点 A に作用する荷重であるが，図中のように(x,y)座標を導入すると，$\boldsymbol{Q}_1$ と $\boldsymbol{Q}_3$ がいずれも y 軸の負の方向の荷重なので，棒 AC は節点 A に，y 軸の上向きの力を作用していることがわかる．この荷重を $\boldsymbol{Q}_4$ とする．同様に力の釣り合いを書くと，



$$\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_3+\boldsymbol{Q}_4=\boldsymbol{0} \longrightarrow \{$$

第 1 式より，$Q_1 = Q_3 = \dfrac{P}{\sqrt{2}}$ であることがわかり，これを第 2 式に代入すると，

$Q_4 = 2\times Q_1\dfrac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow Q_4 = \sqrt{2}Q_1 = P$ となる．

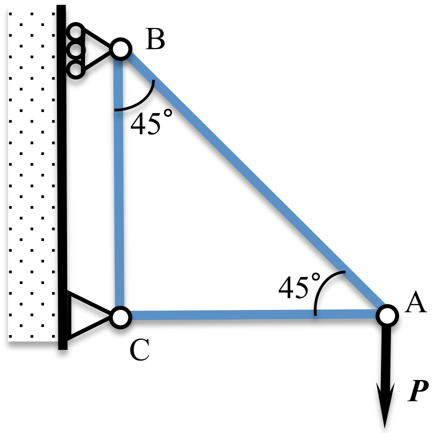
以上の結果を，棒にかかる荷重として解釈すると，棒 AB,BC,CD,DA には $P/\sqrt{2}$ の引張り荷重がかかり，棒 AC には P の圧縮荷重がかかっていることがわかる．

なお，ここでは，力の釣り合いに関する定性的な議論から，$\boldsymbol{Q}_4$ の向きを y 軸上の正の方向であるとして計算したが，仮に，負の方向であると仮定しても，$\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_3+\boldsymbol{Q}_4=\boldsymbol{0}$ というベクトル表記は変わらず，成分で表記した時に，

$$\left.\begin{array}{r} Q_1\sin 45^\circ - Q_3\sin 45^\circ = 0 \\ -Q_4 - Q_1\cos 45^\circ - Q_3\cos 45^\circ = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow Q_4 = -P$$

となり，計算の結果，$\boldsymbol{Q}_4$ の成分が負の値となって（P が正であるというのは，前提），仮定した $\boldsymbol{Q}_4$ の向きが，実際には逆方向であることがわかるので，結果としては，同じ結論になる．

講義名　連続体力学　配布資料　OCW-i



<演習１＞　次のトラスの各部材にかかる荷重を求めよ．節点 A,B,C は滑点で，節点 B は移動支持，節点 C は回転支持である．節点 A に荷重 P が作用している．

４　単軸応力下における仮想断面の応力ベクトル成分

自由物体法を使って，図５(a)に示した荷重軸から面法線が θ 傾いている面（ただし，-90°< θ <90°）に作用する垂直応力ベクトル σ_n と剪断応力ベクトル σ_t を求めてみよう．まず，荷重軸を x 軸に一致させて$(x,\ y)$座標を導入し，その x 軸が反時計方向に+ θ 回転した新しい座標を$(x',\ y')$座標とする．すると，θ 傾いている仮想断面の法線が x' 軸に一致する．次に，仮想断面で切断し，その上側の物体を取り出して，それに作用する力を考えてみると，図５(b)のようになる．これを見ると，この物体には，上向きに負荷応力ベクトル $\sigma_{applied}$ と，下向きに内部応力ベクトル σ だけしか作用していないことがわかる．したがって，力に直して（すなわち，それぞれの断面積を掛けて）力の釣り合い式を書くと，

$$\boldsymbol{\sigma}_{applied} S + \boldsymbol{\sigma}\frac{S}{\cos\theta} = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}_{applied}\cos\theta \qquad (3)$$

ここで，面法線が荷重軸から θ 傾いた面の断面積に $\sin(90°-\theta) = \cos\theta$ を掛けると，垂直断面積になることを用いた．

(a)　荷重軸から面法線が θ 傾いた面　　(b)　自由物体法　　(c)　応力ベクトルを 2 方向に分解

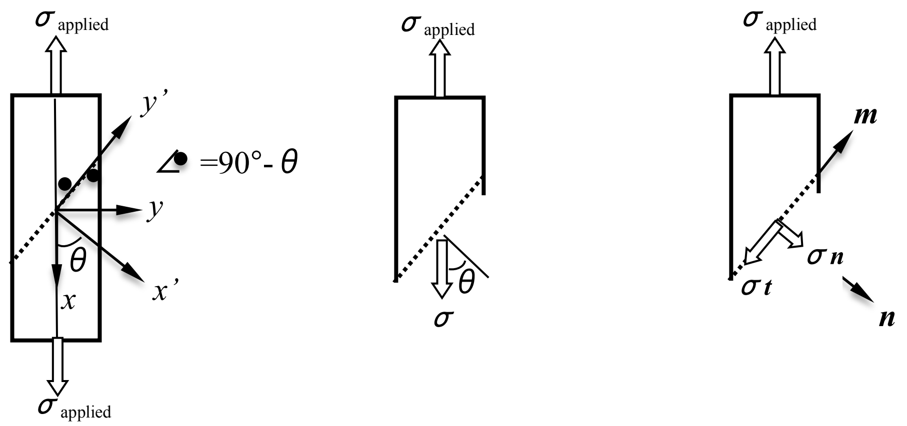


図５　荷重軸から θ 傾いた面での垂直応力ベクトルと剪断応力ベクトルへの分解

講義名　連続体力学　配布資料　OCW-i

（注意事項）

ここでは，応力ベクトルとして釣り合い式を書いているので，対象となる応力ベクトルの符号は考えずに全て足し合わせて $\boldsymbol{0}$ ベクトルにしているが，多くの材料力学の教科書では，応力ベクトルの成分を扱うので，応力ベクトルの方向と向きを自由物体図上に予め与えて，その向きと座標軸の関係によっては成分にマイナスを付けてから（すなわち，応力ベクトルの成分を表す変数記号自体は正の値を取ると考えて，負の方向を向いている応力ベクトル成分には，マイナス負号を付けてから），足し算をすることになっているので注意する．すなわち，(3)式の導出でいうと，材料力学的には

$\sigma_{applied} S - \sigma \dfrac{S}{\cos\theta} = 0 \qquad \therefore \sigma = \sigma_{applied}\cos\theta$ という表現となる．逆に言うと，ベクトルとして足し算した結果である(3)式の右辺にマイナスがついているのは，$\boldsymbol{\sigma}$ ベクトルが $\boldsymbol{\sigma}_{applied}$ ベクトルと逆向きのベクトルであることを表していることになる．

このような複雑な表記の理由は，応力の値自体に正負の符号があり（例えば，垂直応力で言えば，引張りが正で，圧縮が負），その上で，これらの応力が微小体積に作用する際には，これらの応力が座標軸に対してどちらを向いているかで，改めて，正負を振り直さないとならないからである．

５．仮想断面上の垂直応力ベクトル成分と剪断応力ベクトル成分

次に，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ を仮想断面に垂直な成分（垂直応力ベクトル）$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{n}}$ と平行な成分（剪断応力ベクトル）$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{t}}$ に分ける．まず，角度 θ 傾いた仮想断面の面法線を $\boldsymbol{n}$ とすると(x' 軸方向の単位ベクトルに一致する)，面法線の成分は x 軸，y 軸からの方向余弦を使って(　　)となる．同様に，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ を成分表示すると，x 軸方向の成分しかもっていないので，$(\sigma,\ 0)$ となる．これより，この仮想断面に作用する垂直応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{n}}$ は．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_n &= (\cos\theta,\quad \sin\theta)\begin{pmatrix}\sigma\\ 0\end{pmatrix}\boldsymbol{n}\\
&= \sigma\cos\theta\,\boldsymbol{n} \qquad\qquad (4)
\end{aligned}
$$

同様に，仮想断面に作用する剪断応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{t}}$ は，面法線に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{m}$（y' 軸方向の単位ベクトル）が(　　)となることを考慮して($\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{m}$ の内積を取ると 0 になっていることがわかる)，

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{t}} = (-\sin\theta,\quad \cos\theta)\begin{pmatrix}\sigma\\0\end{pmatrix}\boldsymbol{m}$$
$$= -\sigma\sin\theta\,\boldsymbol{m} \qquad (5)$$

ここで，（5）式に負号がつくのは，$\boldsymbol{m}$ と σ_{t} が逆向きのベクトルであることを表している．負荷応力ベクトル $\sigma_{\mathrm{applied}}$ と応力ベクトル σ の間には(3)式の関係があるので，(3)式を成分表示すると，そもそも，負荷応力ベクトル $\sigma_{\mathrm{applied}}$ は x 軸方向の負の方向を向いているので，その成分に負号を付いていて（$-\sigma_{applied}\cos\theta$）となり，さらに，(3)式の $\sigma_{\mathrm{applied}}$ と σ が逆向きということによる負号も加わるので，

$$\begin{pmatrix}\sigma\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-\sigma_{applied}\cos\theta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{applied}\cos\theta\\0\end{pmatrix} \qquad (6)$$

となって，σ は x 軸の正の方向を向いたベクトルとなる．(6)式を(4)，(5)式に代入すると，

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{applied}\cos^2\theta\,\boldsymbol{n} \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{t}} = -\sigma_{applied}\sin\theta\cos\theta\,\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2}\sigma_{applied}\sin2\theta\,\boldsymbol{m} \qquad (8)$$

となる．このように，成分で計算してくると，通常の材料力学の結果と同じものが得られる．これらの式から，任意の面法線を持つ仮想断面に作用する垂直応力ベクトル σ_{n} と剪断応力ベクトル σ_{t} を求めることができる．逆に言えば，ある点の周りで，仮想断面を回転すると，回転するごとに，垂直応力ベクトルと剪断応力ベクトルが変化してしまう．毎回，毎回，ベクトルの演算をするのは煩わしいし，ましてや，今回のように面内で回転するだけでなく，空間内で 3 次元的に回転させる場合は，計算間違いも起こしやすい．そこで，物体内の任意の点に対して，その点を通る任意の面に作用する応力ベクトル σ（$\sigma=\sigma_{\mathrm{n}}+\sigma_{\mathrm{t}}$）を簡単な代数計算で求めるための方法が応力テンソルによる記法である．

＜演習２＞　θ が $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ に変化した時の σ_{n} と σ_{t} の変化を図示せよ．