

第3回 ラグランジュ方程式

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. はじめに

前回の講義でラグランジュ方程式の導出過程を説明したので、今回の講義では、その具体的な使い方を示すことにする。なお、ラグランジュ方程式の導出の仕方には、変分法を用いたものもあるので、興味のある学生は成書で調べてみるとよい。科学における最も典型的な考え方を学こともできよう。

2. 2重振り子問題

図1の二重振り子の運動方程式を求めたい。2つの質点の質量を m_1, m_2 、振り子の腕の長さを ℓ_1, ℓ_2 、鉛直線からの角度を θ_1, θ_2 とする。振り子の支点を座標の原点とし、鉛直下方を x 軸、水平方向を y 軸とする。

(解答例) 質点 m_1 のデカルト座標を (x_1, y_1) とすると、 (ℓ_1, θ_1) との関係は、

$$\begin{cases} x_1 = \ell_1 \cos \theta_1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \ell_1 \sin \theta_1 & (2) \end{cases}$$

となる。質点 m_2 のデカルト座標を (x_2, y_2) とすると、 (ℓ_2, θ_2) との関係は、

$$\begin{cases} x_2 = \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2 & (4) \end{cases}$$

となる。これより、 $\dot{x}_1, \dot{y}_1$ を作ると、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = & (6) \end{cases}$$

となる。さらに、 $\dot{x}_1^2, \dot{y}_1^2$ を作って質点 m_1 の運動エネルギー T_1 を求めると、

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1}{2} \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (7)$$

となる。同様に、質点 m_2 の運動エネルギー T_2 も求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \\ &= \\ &= \frac{m_2}{2} \left[\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right] \quad (8) \end{aligned}$$

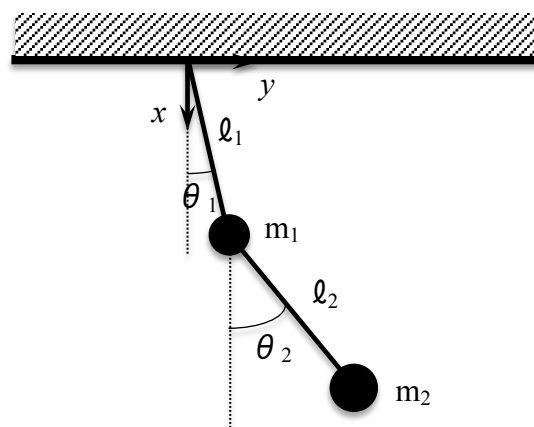


図1 2重振り子問題

次に、ポテンシャルエネルギー U についてであるが、 xy 座標系の原点の位置でポテンシャルエネルギーを 0 とし、鉛直下方になるにつれて、ポテンシャルエネルギーが減少するものとする。これは、 x 座標の正負とは逆方向になるが、そもそも重力によるポテンシャルエネルギーなので、振り子の最下点でポテンシャルエネルギーが最小値を取るようにするためである。その結果、ポテンシャルエネルギー U は、

$$U = -m_1 g \ell \cos \theta_1 - m_2 g (\ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2) \quad (9)$$

となり、ラグランジアン L は (7), (8), (9)式から

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g \ell \cos \theta_1 + m_2 g \ell_2 \cos \theta_2 \quad (10)$$

となる。 ℓ_1, ℓ_2 は定数なので、 θ_1, θ_2 が一般化座標となる（自由度は 2）。すなわち

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right. \quad (11)$$

$$(12)$$

がラグランジュ方程式になる。後は、(10)式を(11)式と(12)式に代入して計算すればよいのであるが、(11)式に代入した計算過程を追ってみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

となるので、これを(11)式に代入すると、

$$(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (13)$$

となる。ただし、整理の仕方で $\sin(\theta_2 - \theta_1) = -\sin(\theta_1 - \theta_2)$, $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ だけ結果が異なる場合があり得る。

同様にして、(12)式も計算してみると、

$$m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g \ell_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (14)$$

となる。この(13)式と(14)式が 2 重振り子の運動方程式となる。この微分方程式は解析的には解けないので、初期条件を与えて、差分法などの数値解析法で具体的な問題が解かれている。

<演習 1>

(14)式を導出せよ。

＜演習 2＞

バネ定数 k のバネと質量 m_1, m_2 の質点が図 2 のように滑車を通して結ばれている。摩擦はないものとし、バネの自然長からの伸びを x として、この系の運動方程式をラグランジュ方程式から求めよ。重力加速度を g とする。

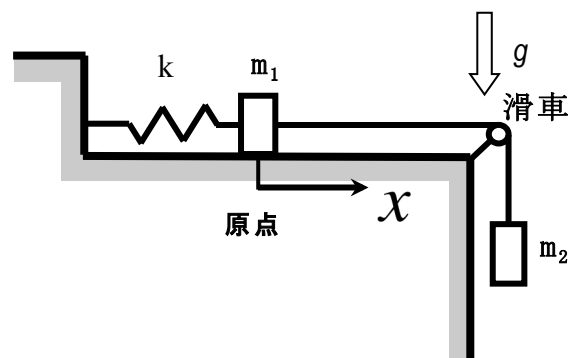


図 2 バネと質点系

＜演習 3＞

質量 m の質点が腕の長さ ℓ の紐に吊されて振り子を形成している。振り子の支点が図中の xy 座標において、 $a \cos \omega t$ (a は振幅で定数, ω は角振動数, t は時間) で運動する場合の質点の運動方程式を求めよ。

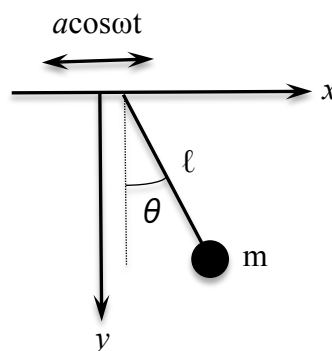


図 3 振り子の支点の運動

3. 機械・電気連成問題

実は、ラグランジュ方程式は力学だけでなく、電気回路についても適用できる。物理量間の対応関係は、以下の通りである。これを用いると、電気回路でモーターを回し、ファンで風を送ると言った電機制御問題（連成問題）を解くことができる。

機械系

力 F

速度 $\dot{x}$

変位 x

質量 M

バネ定数 k

機械抵抗（ダンパー） C

電気系

電圧 V

電流 I

電荷 Q

インダクタンス L

キャパシタンスの逆数 $1/C$

電気抵抗 R

$$F = kx$$

$$F = C\dot{x}$$

$$F = M\ddot{x}$$

$$V = \frac{Q}{C} \quad \leftarrow Q = CV$$

$$V = RI = R\dot{Q}$$

$$V = L\dot{I} = L\ddot{Q}$$

$$\text{運動エネルギー} \quad T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$\text{電磁エネルギー} \quad T = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \dot{Q}^2$$

$$\text{ポテンシャル} \quad U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{静電エネルギー} \quad U = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2C} \left(\int I dt \right)^2$$

$$\text{散逸関数} \quad D = \frac{1}{2} C \dot{x}^2$$

$$\text{散逸関数} \quad D = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} R (\dot{Q})^2$$

$$\text{散逸力} \quad F' = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -C \dot{x}$$

$$\text{散逸力} \quad F' = -\frac{\partial D}{\partial \dot{Q}} = -R \dot{Q}$$

<例題 1>

右図の電気回路の支配方程式を求めよ。この場合は、電流 I ではなく、電荷 Q で記述する方が分かりやすい。

(解答例)

$$\text{運動エネルギーは, } T = \frac{1}{2} L \dot{Q}^2$$

$$\text{コンデンサーのポテンシャルエネルギーは, } U = \frac{1}{2C} Q^2$$

$$\text{従って, ラグランジアン } L \text{ は, } L = \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 - \frac{1}{2C} Q^2 \text{ となり, 外力としての電圧 } V \text{ と,}$$

$$\text{散逸力としての } -R\dot{Q} \text{ を考慮すると, } \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = L\dot{Q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = L\ddot{Q}, \quad \frac{\partial L}{\partial Q} = -\frac{1}{C} Q \text{ なので,}$$

$$L\ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = V - R\dot{Q} \quad \therefore L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V$$

さらに, $\dot{Q} = I$ を用いると,

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = V$$

と言うお馴染みの式が出てくる。

補足：ポテンシャルエネルギー関数で記述できる保存力は、予め、ポテンシャルエネルギー U としてラグランジアンの中に組み込まれて考慮されているが、ポテンシャルエネルギーで記述できない非保存力（例えば、摩擦力）や外力（振動問題における強制力項など）は、ラグランジュ方程式の右辺の 0 にそのまま足せばよい。この理由は、ラグランジュ方程式の導出（前回の講義）を見てもらうと理解することができる。