

第 2 回 ダランベールの原理

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. はじめに

今回の講義では、まず、前半でダランベールの原理について説明する。これを用いると、動力学の問題を静力学の問題として解くことができ、さらに、前回の仮想仕事の原理を適用すると動力学問題も簡単に解くことができるようになる。また、後半では、ダランベールの原理の応用として、ラグランジュ方程式の導出を示す。ラグランジュ方程式の実際の使い方は、次回の講義で述べる。

2. ダランベールの原理

n 個の質点からなる質点系を考える。 i 番目の質点の質量を m_i とし、その質点に作用する合力ベクトルを F_i^{total} とすると、ニュートンの運動方程式は、前回示したように、

$$\dot{p}_i = F_i^{\text{total}} \quad (i=1,n) \quad (1)$$

ここで、 p_i は i 番目の質点の運動量ベクトルであり、

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} m_i v_i = m_i \ddot{r}_i \quad (i=1,n) \quad (2)$$

となる。ここで、 r_i は i 番目の質点の位置ベクトルである。(2) 式を (1) 式に代入して、次のように書き換えてみる。

$$F_i^{\text{total}} - m_i \ddot{r}_i = 0 \quad (i=1,n) \quad (3)$$

このようにしてみると、実際に質点に作用している合力ベクトル F_i^{total} と慣性力ベクトル $m_i \ddot{r}_i$ とが釣り合っているというように解釈することができる。すなわち、動力学問題においても慣性力ベクトルを考慮すれば、静力学問題として解くことができることになる。これをダランベールの原理という。

さらに、ダランベールの原理に仮想仕事の原理を適用してみる。前回同様、 i 番目の質点の合力ベクトル F_i^{total} を拘束力ベクトル S_i と拘束力以外の実際に作用している力ベクトル F_i に分けて表記してみる。

$$F_i^{\text{total}} = F_i + S_i \quad (i=1,n) \quad (4)$$

拘束条件を破らないようにして i 番目の質点に仮想変位ベクトル δr_i を与え、すべての質点の仮想仕事を足し合わせると、ダランベールの原理の意味で釣り合っているとすれば、

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^n [F_i^{\text{total}} - m_i \ddot{r}_i] \cdot \delta r_i \\ &= \sum_{i=1}^n [F_i + S_i - m_i \ddot{r}_i] \cdot \delta r_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。もし、運動が滑らかで拘束力が仕事をしない場合には、(5) 式は、

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (6)$$

となって、実際に作用している力ベクトルだけが含まれる形になる。しばしば、この(6) 式のことも、ダランベールの原理と呼ばれる。なお、(6) 式をデカルト座標系 (x_i, y_i, z_i) で各ベクトル成分を使って実際に書き下すと、

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \left[(F_{xi} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (F_{yi} - m_i \ddot{y}_i) \cdot \delta y_i + (F_{zi} - m_i \ddot{z}_i) \cdot \delta z_i \right] = 0 \quad (7)$$

となる。

<例題 1> 右図に示した重量 W と $2W$ の 2 つの物体が鉛直面内で滑車を介して吊されている。重量 W の物体に重量 Q なる物体を付加して、鉛直下方への加速度 $a=0.1g$ (g は重力加速度) となるようにするには、重量 Q をどのくらいにすればよいか？ 滑車および引き綱の質量や摩擦は無視せよ。

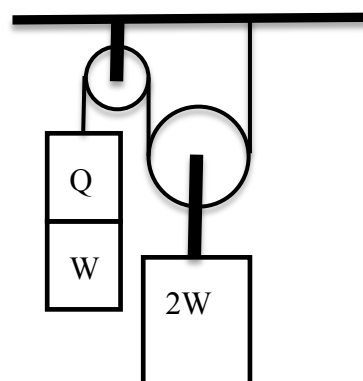


図 1 滑車の問題

(解答例 1) ダランベールの原理に仮想仕事の原理を適用して、この系の仮想仕事を表すことにする。鉛直下方を正の方向にし、 $2W$ が動滑車に吊るされていることから、 $(W+Q)$ が下方に δx 仮想変位すると $2W$ が $\delta x/2$ だけ上方に動くことを考慮すると、

$$(W + Q)\delta x + \frac{(W + Q)}{g}(-a)\delta x + 2W\left(-\frac{\delta x}{2}\right) + \frac{2W}{g}\left(+\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{\delta x}{2}\right) = 0 \quad (8)$$

となる。重力加速度 g で除している項は慣性力項である。この式を整理すると、

$$Q = \frac{\frac{3a}{2g}}{1 - \frac{a}{g}} W \quad (9)$$

となり、 $a=0.1g$ を代入すると、 $Q=W/6$ という結果が得られる。

(解答例 2) この問題を従来のニュートン力学で解いてみる。引き綱の張力を S として (ニュートン力学では、このような詳細不明な力をまず仮定するところから始まるのだが)、 $2W$ と $(W+Q)$ の 2 物体の運動方程式は、

$$\begin{cases} 2W + \frac{2W}{g} \frac{a}{2} - 2S = 0 & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (W + Q) - \frac{(W + Q)}{g} a - S = 0 & (11) \end{cases}$$

となる。(10)式、(11)式は、それぞれ張力 S について解けるので、

$$\begin{cases} S = (W + Q)\left(1 - \frac{a}{g}\right) & (12) \\ S = W\left(1 + \frac{a}{2g}\right) & (13) \end{cases}$$

となる. (12)式, (13)式から張力 S を消去すれば, Q と W の関係として, やはり, (9)式が得られる. また, このようにして求めた Q を(12)式, (13)式に代入すれば, 張力 $S(=21W/20)$ も求められるということになる.

<演習 1> 図 2 のような同軸の大小 2 個の滑車に糸を巻いて, 物体 P と Q を吊す. 糸の質量や変形, および滑車の摩擦や慣性は無視して, 物体 P の落下する加速度 a を求めよ. ただし, $P=8\text{kg}$, $Q=12\text{kg}$, $r_2=2r_1$ とする.

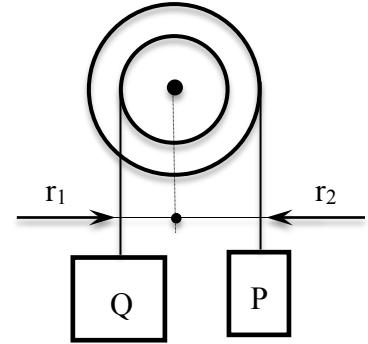


図 2 同軸滑車の問題

3. 一般化座標

デカルト座標 (x, y, z) はそれぞれ長さの次元を持つが, よく使われる球座標 (r, θ, ϕ) では, θ や ϕ は長さの次元を持っていない (dr は長さの次元を持っているが, $d\theta$ や $d\phi$ は長さの次元をもっておらず, $r d\theta$ や $r \sin \theta d\phi$ が長さの次元を持っている). さらに, 前回説明したように, 拘束条件があると運動の自由度が減るので, n 個の質点の座標を r_i (すなわち, $x_{11}, y_{11}, z_{11}, \dots, x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}, \dots, x_{nn}, y_{nn}, z_{nn}$) のように個別に区別しておく必要もなくなる. そこで, n 個の質点の座標を q_i ($i=1, 3n$) のように表記して, これを一般化座標と呼ぶ. もし, 拘束条件が ℓ 個あれば, 一般化座標の数は, $(3n-\ell)$ 個となり, q_i ($i=1, 3n-\ell$) と表す. $3n-\ell$ を新たに m と定義して, この質点系の自由度と呼ぶ.

一般化座標を決めると, 通常の座標 r_i ($i=1, n$) と一般化座標 q_j ($j=1, m$) の間には, 一般的に, 次のような関係がある.

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = r_i(q_j, t) \quad (j=1, m) \quad (14)$$

したがって, 速度 v_i は, 微分の鎖法則を使って,

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (15)$$

と表すことができ, 仮想変位 δr_i も,

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (16)$$

と表せる.

4. ラグランジュ方程式

ここでは, ダランベールの原理 ((6)式) から, ラグランジュの運動方程式を導く. (6)式を実際に作用する力ベクトル F_i のなす仮想仕事と, 慣性力 $-m_i \ddot{r}_i$ のなす仮想仕事

に分けて、一般化座標を用いて書き直していく。まず、前者については、

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \delta q_j \quad (17)$$

ここで、 Q_j は一般化力と呼び、次式で定義される。

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (18)$$

次に慣性力項であるが、符号のマイナスを外して式変形をすると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)}{dt} \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\} \delta q_j \quad (19) \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の等号では $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$ の関係を用いた。この関係式は(15)式の $\dot{\mathbf{r}}_i$ を $\dot{q}_j$ で偏微分すれば求められる。(19)式はさらに次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T \right\} \delta q_j \quad (20) \end{aligned}$$

ここで、 T は質点系の全運動エネルギーで、次式で定義される。

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (21)$$

(17)式と(20)式を(6)式に代入すると、ダランベールの原理により、

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (22)$$

となる。仮想変位 δq_j は任意に選べるので、(22)式が成り立つためには、左辺の中括

弧が全て 0 でなければならない.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad (j=1,m) \quad (23)$$

さらに, 任意の質点 m_i (質点の位置ベクトルは $\mathbf{r}_i$ とする) に作用している力ベクトル $\mathbf{F}_i$ が保存力であるとすれば, ポテンシャルエネルギー関数 $U(\mathbf{r}_i)$ が定義できて,

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U(\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial x} \\ -\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial y} \\ -\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial z} \end{pmatrix} = -\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (24)$$

となる. そこで, (24)式を(18)式に代入すると,

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ &= -\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (25)$$

この(25)式を(17)式に代入すると,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \equiv \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \delta q_j = \sum_{j=1}^m \left(-\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j \quad (26)$$

(26)式を(23)式に代入すると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \left(-\frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j &= 0 \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U(\mathbf{r}_i))}{\partial q_j} &= 0 \quad (j=1,m) \end{aligned} \quad (27)$$

となる. さらに, ポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{r}_i)$ は, 一般的に, 一般化速度 $\dot{q}_j$ には依存しないので, (27)式を次のように書き換えてもよい.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U(\mathbf{r}_i))}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U(\mathbf{r}_i))}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,m) \quad (28)$$

そこで、 $T-U(r_i)$ を新たにラグランジアン L と定義すれば、

$$L = T - U(r_i) \quad (29)$$

(28)式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, m) \quad (30)$$

これをラグランジュ方程式と呼ぶ。

<演習 2>

1 質点のラグランジアン L が(31)式で与えられている時、ラグランジュ方程式に代入して運動方程式を求めよ。ここで m は質点の質量、 (x, y, z) はデカルト座標である。

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (31)$$

<演習 3>

平面極座標 (r, θ) における運動方程式を以下の手順で求めよ。

- ① デカルト座標系 (x, y) におけるラグランジアン L が次式で与えられている。 m は質点の質量、 $U(x, y)$ はポテンシャルエネルギーである。デカルト座標と平面極座標との間の座標変換式を用いて、(32)式のラグランジアンを平面極座標を変数と持つように書き換えよ。

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) \quad (32)$$

- ② この講義では時間の関係上、詳しい説明を省くが、①のような座標変換（点変換と呼ぶ）に対して、(30)式のラグランジュ方程式は普遍であることが証明されている。したがって、平面極座標についても、(33)式が成り立つ。そこで、①で得られたラグランジアンを代入して、平面極座標における運動方程式を導出せよ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (33)$$