

第 1 回 運動方程式・仮想仕事の原理

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. はじめに

既に、高校物理でニュートン力学は学習しているが、大学入試の際に、無機材料工学科は応用化学系に分類されていることから、物理が苦手な学生も少なくない。しかし、無機材料工学科で習う学問分野の多く（例えば、熱力学、統計力学、量子力学、物性物理学など）は、力学を基礎として構築されているといっても過言ではない。したがって、直面する問題に対し、力学的に状況を把握し、それを定式化できるようになることは、将来、有為な研究者・技術者になるための必須条件となっている。そこで、本講義では、ニュートン力学の復習から、説き起こし、最終的には、連続体力学の基本概念をイメージできるような内容構成とした。今回は、ニュートン力学の復習である。

2. 質点の運動方程式

既に、学習してきていることなので、要点のみを整理する。

(1) ニュートンの運動の法則

ニュートンの運動の法則は、次の 3 つの法則で表される。

第 1 法則（慣性の法則） 質点は、力が作用して運動状態が変化しない限り、静止あるいは直線等速運動の状態を維持する。

第 2 法則（運動方程式） 運動量の変化は加えられた力に比例して、力の働いた直線方向に沿って起こる。

第 3 法則（作用・反作用の法則）すべての作用に対して、大きさが等しく、方向が反対向きの反作用が常に存在する。

高校物理では、運動方程式は、次のように与えられた。

$$F = ma \quad (1)$$

ここで、 F は質点に働く力、 a は質点の加速度である。一方、上記の第 2 法則を式に表すと、

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (2)$$

となり、 p は運動量を表す。特に、力学の場合、時間微分については、ニュートンの記法を使って、ドットを用いて、次のように表すことが慣例となっている。

$$\dot{p} = F \quad (3)$$

ここで、運動量 p は

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}} \quad (4)$$

で定義されている。もし、力 F が作用しなければ、運動量は変化しないので、

$$m\mathbf{v} = \text{const} \quad (5)$$

となる。これを運動量保存則という。

(2) 仕事、ポテンシャルエネルギー

力 F が位置 r の関数であった場合、 $F(r)$ と表現するが、このような力が作用する中
を質点が点 P から点 Q まで運動したとき、力が質点に対して行った仕事は、

$$W_{pq} = \int_P^Q \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (6)$$

となるが、一般的には、この仕事は、点 P から点 Q にいたる経路に依存して変わる。
ただし、力の中には、経路には依存せず、点 P と点 Q の位置だけに依存する場合があ
って、その場合の力を保存力という。保存力場の場合、先の仕事は、座標に関するス
カラー関数を用いて、次のように書くことができる。

$$W_{pq} = \int_P^Q \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\{U(\mathbf{r}_Q) - U(\mathbf{r}_P)\} \quad (7)$$

このスカラー関数 $U(\mathbf{r})$ を、この保存力のポテンシャルエネルギーという。2 点
 $P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$ が近ければ、上式の右辺は、

$$\begin{aligned} -dU &= -(U(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned} \quad (8)$$

と書けるので、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (9)$$

と表すことができる。

(3) エネルギー保存則

質点が点 P から点 Q まで運動した時の仕事 W_{PQ} は、次のようにして求めることも
できる。

$$\begin{aligned} W_{PQ} &= \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_P^Q m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_{t_P}^{t_Q} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_p}^{t_q} \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} dt \\
&= \frac{m}{2} v_q^2 - \frac{m}{2} v_p^2 \quad (12)
\end{aligned}$$

となる。そこで、

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (13)$$

を質点の運動エネルギーと定義する。さらに、(7)式と(12)式を等しいとおいて、整理すると、

$$\frac{m}{2} v_p^2 + U(r_p) = \frac{m}{2} v_q^2 + U(r_q) \quad (14)$$

となり、点 P から点 Q までに運動において、(14)式の両辺が、それぞれ保存されることがわかる。そこで、

$$E = \frac{m}{2} v^2 + U(r) \quad (15)$$

と新たに定義して、これを力学的全エネルギーとよぶ。また、(14)式を力学的エネルギー保存則と呼ぶ。

(4) 角運動量保存則

質点が座標 r の点で、運動量 p を持っている場合、

$$\ell = r \times p \quad (16)$$

を座標原点周りの角運動量と呼ぶ。各運動量の時間変化を求めてみると、

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell}{dt} &= r \times \frac{dp}{dt} + \frac{dr}{dt} \times p \\
&= r \times F + v \times mv \\
&= r \times F \quad (17)
\end{aligned}$$

となる。そこで、

$$N = r \times F \quad (18)$$

と定義して、これを座標原点周りの力のモーメントと呼ぶ。これより、角運動量の変化は、力のモーメントによるということになる。したがって、中心力場のように、運動中、つねに力 F と位置ベクトル r とが平行ならば、力のモーメント N は 0 となるので、角運動量は保存される。これを角運動量保存則という。

以上がニュートン力学の主要部分であるが、通常の力学の教科書では、以上のことを基礎にして、質点系の運動や剛体の運動について、各種の定式化を行っているがここでは、省略する。

＜演習 1＞

ポテンシャル場 $U(x,y)$ の中の質点の 2 次元平面運動を考える。質点の質量を m とすると、デカルト座標系での運動方程式は、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

以下の手順で、平面極座標における運動方程式を導出せよ。

①デカルト座標 (x,y) と平面極座標 (r, θ) との変換式を求めよ。

② $\dot{x}, \dot{y}$ を求めよ。

③ $\ddot{x}, \ddot{y}$ を求めよ。

④合成関数の微分（鎖法則）を用いて、 $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ を $\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{\partial U}{\partial \theta}$ で表せ。

必要であれば、 $\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$ の公式を用いてもよい。

⑤③と④の結果を(19)式に代入し、平面極座標の運動方程式を求めよ。

* 平面極座標での運動方程式が、 $m\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}, m\ddot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$ とならず、用いる座標系によって、運動方程式の形が変わってしまうことを確認せよ。

3. 静力学と仮想仕事の原理

（1）運動の自由度と拘束条件

3 次元空間中を運動する 1 つの質点は、各時刻における 3 つの座標を決めれば（例えば、デカルト座標系では、 (x, y, z) 、球座標系では、 (r, θ, ϕ) を決めれば）、運動を決定することができる。したがって、運動の自由度は 3 ということになる。もし、質点の運動が (x, y) 平面上に拘束されていた場合は、運動の自由度は 2 となるが、 $z=0$ という拘束条件が 1 つ加えられることになる。すなわち、1 つの質点の運動では、自由度と拘束条件の数を足すと、必ず、3 になる。

一般に、拘束条件は座標（あるいは変位）を用いて規定されるが、そのように拘束されるためには、拘束力が作用していることになる。例えば、先の平面運動の場合、 $z=0$ となるためには、質点に実際に負荷されている重力（これも外力の 1 つと考えるが、...）と釣り合うように、平面からの垂直抗力が作用して、 z 方向の力が釣り合うため、 $z=0$ が維持されている訳である。すなわち、実際に平面運動を起こさせるための平面に平行な外力や重力の他に、拘束条件を満足させるための垂直抗力も作用していて、これを拘束力と呼ぶ。

拘束力が仕事をしない場合の運動を滑らかな運動と呼び、平面運動の場合、摩擦係数が 0 で垂直抗力に比例した摩擦力が働かない場合となる。一方、拘束力が仕事をする場合は、滑らかでない運動と呼ばれる。

<演習 2>

2 原子分子の古典モデルのように、2 つの質点が一定の距離で結合している場合について、3 次元空間内の運動（独立な座標変数の数）の自由度を求めよ。

(2) 仮想仕事の原理

ニュートンの運動方程式によれば、1 つの質点が 3 次元空間内で静止している場合には、その質点に働く合力が 0 となっている。ここで、この質点に働く拘束力を S_i 、拘束力以外の力を F_i とすると、合力 0 ということは、

$$\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m S_j = 0 \quad (20)$$

と表される。ここで、拘束条件を破らないようにして、無限小の変位 δr だけ質点を動かしてみることにする。ここで、この変位は、我々が想像上与える変位なので、仮想変位と呼ばれている。このような仮想変位を行ったときに拘束力も含めてすべての

$$\delta W = \left(\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m S_j \right) \cdot \delta r \quad (21)$$

力がなす仕事のことを
仮想仕事 δW と呼ぶ。す
なわち、

と表されるが、(20)式が成り立っているので、

$$\delta W = 0 \quad (22)$$

となる。逆に、仮想変位 δr をどのように取ったとしても、(22)式が成り立つならば、(21)式右辺の括弧が 0 となり、その質点は、釣り合っていると言いが言える。これを仮想仕事の原理と呼び、静力学の問題を解くときに使われる。

特に、拘束力が仕事をしない滑らかな運動の場合、(22)式は、

$$(23)$$

となり、拘束力が式の中に陽には出てこない。釣り合いの位置を決めるのに、計算が簡単にできる。逆に、釣り合いの位置からは、拘束力が直ちに求められない場合もある。

<例題 1>

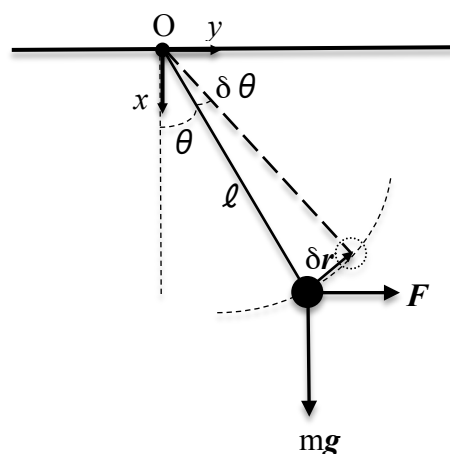


図 1 単振子の問題

図1に示すように、質量 m の質点が長さ ℓ の紐で吊された単振子を考える。紐の支点を原点とし、鉛直下方に x 軸、水平方向に y 軸を取る。水平方向の力 F で引っ張った時の角度 θ を求めよ。

(解答例) 質点には、重力 mg 、水平力 F 、紐の張力 T が作用しているが、紐の長さが ℓ で一定なので、角度 θ を $\delta\theta$ だけ動かして、その円周上を質点が仮想変位した場合、拘束力としての張力 T は δr と直交するので、仕事をしない。そこで、重力と水平力だけを考えればよい。 δr の x 方向、 y 方向の成分を δx 、 δy とすれば、

$$mg\delta x + F\delta y = 0 \quad (24)$$

となる。ここで、拘束条件は $x^2 + y^2 = \ell^2$ なので、 θ を用いて、 $x = \ell \cos\theta$ 、 $y = \ell \sin\theta$ と書ける。これより、 $\delta x = -\ell \sin\theta \delta\theta$ 、 $\delta y = \ell \cos\theta \delta\theta$ となるので、(24)式に代入すると、

$$-mg\ell \sin\theta \delta\theta + F\ell \cos\theta \delta\theta = (-mg \sin\theta + F \cos\theta)\ell \delta\theta = 0$$

$$F \cos\theta = mg \sin\theta$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F}{mg}\right) \quad (25)$$

のように、釣り合い位置の角度 θ が求められる。

<演習3>

図2に示すように、質量 5kg の質点が2本の紐で吊されている場合を考える。2本の紐に掛かる張力を求めよ。

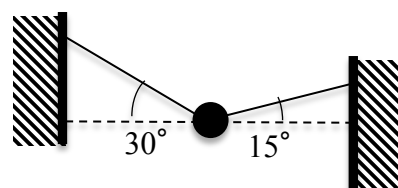


図2 質点の釣り合い

<演習4>

図3に示すように、半径 R の半球面の内側(摩擦係数 μ) に質量 m の質点が止まっている。質点の位置を示す動径と鉛直線とのなす角を θ とする。質点が静止できる最大の角度 $\theta_{\max}$ を求めよ。

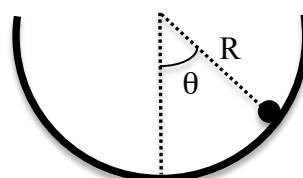


図3 半球面での釣り合い