第８章　変形の熱力学と相互作用エネルギー

8.1　熱力学の第１法則と第２法則

これから先では準静的（quasi-static）変化を考える．ここでいう準静的変化とは，慣性や運動エネルギーを考えない非常にゆっくりとした変化のことである．多くの熱力学の教科書では準静的変化と可逆（reversible）変化を同義としているが，これから学ぶように，変形の問題に対しては意味が異なる．

以下では，ある量 Z の微小変化を $\mathrm{d}Z$，有限変化を ΔZ と表す．熱力学の第１法則によると，物体の内部エネルギー（internal energy）変化 $\mathrm{d}U$ は，周囲から物体に入ってきた熱（heat）$\mathrm{d}Q$ と周囲から物体になされた仕事（work）$\mathrm{d}W$ の和として

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W \tag{8.1}$$

と表わされる．これはエネルギー保存則である．さらに，熱力学の第２法則は熱 $\mathrm{d}Q$ とエントロピー（entropy）変化 $\mathrm{d}S$ を次の式で結びつける．

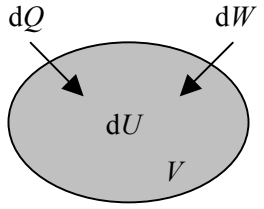

図 8.1　熱力学第１法則.

$$T\,\mathrm{d}S \geq \mathrm{d}Q \tag{8.2}$$

等号は可逆変化のとき，不等号は不可逆（irreversible）変化のときで，T は絶対温度である．

仕事 $\mathrm{d}W$ としては，通常の教科書では体積仕事 $-p\,\mathrm{d}V$ （p：静水圧（hydrostatic pressure），$\mathrm{d}V$：体積変化）を考え，下のように表す．

$$\mathrm{d}W = -p\,\mathrm{d}V \tag{8.3}$$

一方，この講義のような変形の問題では，静水圧による体積仕事のみを扱うことは稀で，一軸外力による仕事や，せん断応力による仕事も考えるので，次の形の方が便利である．

$$\mathrm{d}W = \int_{|V|} \mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \int_{|V|} X_i\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{8.4}$$

この表面２重積分の表式は 6.3 節で使ったものと同じである．(6.32)を導いたときと同様に，(8.4)は外部応力 σ_{ij}^{a}，全ひずみ増分 $\mathrm{d}e_{ij}$，物体の体積 V を用いて

$$\mathrm{d}W = \int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.5}$$

と表すこともできる．(8.3)ではマイナスの符号があるのに，(8.4)や(8.5)にそれがないのは，外力，応力，ひずみに対しては，引張を正，圧縮を負とする定義からであり，(8.3)で物体にかかる静水圧力（圧縮）を正にとる慣例と逆だからである．もし，体積 V の物体中で σ_{ij}^{a}, $\mathrm{d}e_{ij}$ が一様ならば，(8.5)の体積積分の必要がなくなって，かけ算になる．このとき，一様な外部応力を σ_{ij} と表し，さらに，誤解を生じる恐れがないときは，添え字も取ってしまって以下のように簡略化表現とする．

$$\mathrm{d}W = V\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon \tag{8.6}$$

以後，不必要な面倒を避けるために，仕事には(8.6)の表現を用いることにする．

8.2　弾性変形（ヘルムホルツエネルギー）

ヘルムホルツエネルギー（Helmholtz energy またはヘルムホルツの自由エネルギー）A は

$$A \equiv U - TS \tag{8.7}$$

と定義される．この定義式の微分をとり，(8.1)，(8.2)，(8.6)を用いると以下を得る．

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T \leq \mathrm{d}U - \mathrm{d}Q - S\,\mathrm{d}T = \mathrm{d}W - S\,\mathrm{d}T = V\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon - S\,\mathrm{d}T \tag{8.8}$$

したがって，等温変化（$\mathrm{d}T = 0$）では次式が成り立つ．

$$\mathrm{d}A \leq \mathrm{d}W = V\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon \tag{8.9}$$

等号は可逆変化のときである．これから，次の結論が導かれる．

［結論１］：等温可逆変化で外界が物体にした仕事は，物体のヘルムホルツエネルギーの増加分に等しい．

さらに，一定温度（$\mathrm{d}T=0$）かつ一定ひずみ（$\mathrm{d}\varepsilon=0$）の変化では，(8.8)は次のようになる．

$$\mathrm{d}A \le 0\text{，（等温・等ひずみ変化）} \tag{8.10}$$

したがって，ヘルムホルツエネルギーは減少することが自然であり，最小（$\mathrm{d}A = 0$）になると状態変化は停止する．これが熱力学的な平衡状態（equilibrium state）である．これから，熱力学は変化の方向に関して[結論２]を導く．

［結論２］：一定温度・一定ひずみ下での物体の状態の自発的な変化は，物体のヘルムホルツエネルギーが小さくなる方向に起こる．そして，熱力学的な安定状態（平衡状態）は，ヘルムホルツエネルギーが最小となるときである．

図 8.2 は(4.11)式で考えたばねの「力（ f ）−伸び（x）関係」であり，図の x_e まで伸ばすために外力 f のした仕事 ΔW は図中のハッチ部の三角形の面積に等しい．また，加えた力を徐々に減じると伸びも減じるが，力−伸び関係は行きも帰りも同じ経路を辿り，力がゼロになると，伸びもゼロになる．すなわち，理想的な弾性変形は，可逆変化として起こる．実際，ΔW という外力のした仕事は，すべてばねに弾性エネルギーとして蓄えられることを我々は知っている．このように，一定温度下でのばねの弾性伸びは熱力学的には可逆過程であり，[結論１]から，ばねに蓄えられた弾性エネルギーは，ばねのヘルムホルツエネルギーの増加分になることが理解できる．

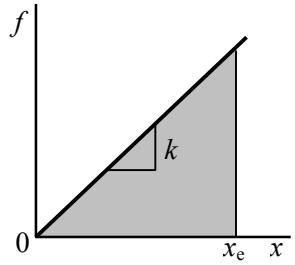

図 8.2　ばねの伸びと弾性エネルギー．

8.3　塑性変形（ギブスエネルギー）

ギブスエネルギー（Gibbs energy またはギブスの自由エネルギー）G は通常は $G \equiv A + pV$ の形で定義されるが，ここでは

$$G \equiv A - V\sigma\varepsilon \tag{8.11}$$

と定義する．この定義式の微分をとると[1]

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}A - V\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon - V\varepsilon\,\mathrm{d}\sigma \tag{8.12}$$

となり，一定応力（$\mathrm{d}\sigma=0$）では次のようになる．

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}A - V\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}A + \mathrm{d}P \quad \text{（一定応力）} \tag{8.13}$$

ここで，$\mathrm{d}P$（$\equiv -V\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon$）は外力のポテンシャルエネルギー変化とよばれ，外力のした全仕事（可逆仕事も不可逆仕事も含まれる）にマイナスを付けたものに等しい．したがって[結論３]が導かれる．

［結論３］：一定応力下での物体のギブスエネルギー変化は，ヘルムホルツエネルギー変化に外力のポテンシャルエネルギー変化を加えたものに等しい．

(8.13)には熱力学の第２法則が含まれていないので，［結論３］は可逆，不可逆いずれの変化の場合にも使える．(8.8)を(8.12)に代入すると以下の不等式を得る．

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}A - V\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon - V\varepsilon\,\mathrm{d}\sigma \le -S\mathrm{d}T - V\varepsilon\,\mathrm{d}\sigma \tag{8.14}$$

したがって，一定温度（$\mathrm{d}T=0$）かつ一定応力（$\mathrm{d}\sigma=0$）の変化では次のようになる．

---

[1]　応力やひずみは微小変形理論に基づくため，体積 V については微分をとらない．

$$dG \leq 0 \text{，（等温・等応力変化）} \tag{8.15}$$

これから，４番目の結論を得る．

［結論４］：一定温度・一定応力下での物体の状態の自発的な変化は，物体のギブスエネルギーが小さくなる方向に起こる．そして，熱力学的な安定状態（平衡状態）は，ギブスエネルギーが最小となるときである．

さて，図 8.3 のような加工硬化しない物体におもりを加えて一軸引張変形させることを考える．そのときの応力（σ）—ひずみ（ε）曲線は図 8.3(a)のようになる．また，以下の変形は，一定温度下で行う（等温変化）ものとする．

まず物体に徐々におもりを加えていくと，図 8.3(a)O→A 間のように弾性変形が起こる．この直線の傾きはヤング率 E である．すぐ上（8.2 節）で述べたように，弾性変形のσ—ε関係は可逆的である．

引張応力が降伏応力σ_Y に達した A→B 間では塑性変形が起こる．たとえば，塑性変形が B まで起こった後に応力を除荷すると，σ—ε関係はどうなるであろうか？　弾性変形の場合と異なり，今度は，B→A→O のように逆向きの経路をたどることはなく，B→D のように O→A と平行な傾きで応力ゼロへと戻り，永久塑性変形ε_pが残る．

塑性変形が物体（体積 V，断面積Σ，長さ l）中で一様に起こったとして図 8.3(a)の各点での熱力学的なエネルギーを勘定すると，次のようになる．ただし，エネルギーの基準（始点）は．変形前の O 点での物体の状態とする．

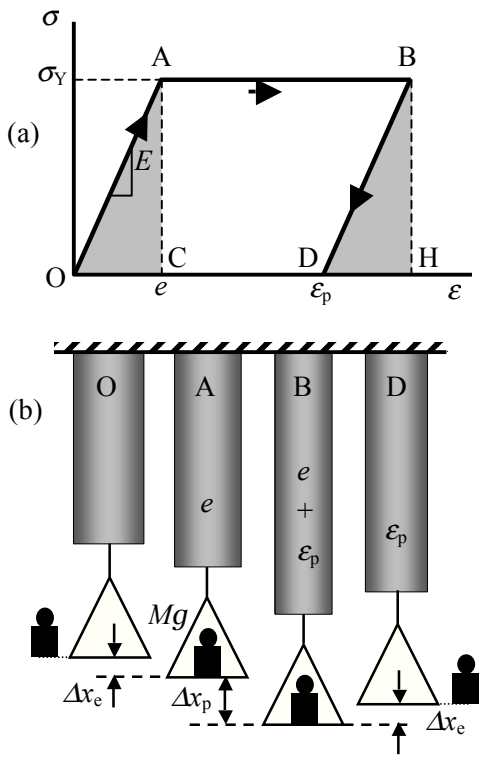

図8.3　加工硬化しない物体の (a) 応力−ひずみ曲線と(b) 一軸引張試験による変形.

A 点：外力の可逆仕事が弾性ひずみエネルギーの増加ΔE（図 8.3(a)のハッチ部の三角形の面積に相当）として物体に蓄えられている．

$$\Delta E_A = V\sigma_Y e/2 = VEe^2/2 \tag{8.16}$$

熱力学的には，この弾性ひずみエネルギーは物体のヘルムホルツエネルギー（の変化分）ΔA_A でもある．すなわち，

$$\Delta E_A = \Delta A_A \tag{8.17}$$

さらに，O→A 間では，上記のヘルムホルツエネルギーの増加以外に，外力のポテンシャルエネルギーの変化（減少）も起こる．これはおもりの位置エネルギーの変化に他ならない．O→A 間の弾性ひずみ e による物体の伸びをΔl，重力加速度を g とすると，質量 M のおもりの位置エネルギー変化は $-Mg\Delta l$ である．$\sigma_Y = Mg/\Sigma$，$e = \Delta l/l$, $V = l\Sigma$に注意すると，A 点での外力ポテンシャルエネルギーの変化 ΔP_A は以下のように表せる．

$$\Delta P_A = -Mg\Delta l = -V\sigma_Y e \tag{8.18}$$

したがって，(8.17)，(8.18)と［結論３］より，O 点を基準にした A 点でのギブスエネルギー（変化）は次式のようになる．

$$\Delta G_A = \Delta A_A + \Delta P_A = (V\sigma_Y e/2) - V\sigma_Y e = -V\sigma_Y e/2 \tag{8.19}$$

B 点：物体のヘルムホルツエネルギーΔA は A 点から変化がない（$\Delta A_{\mathrm{A}} = \Delta A_{\mathrm{B}}$: 塗りつぶした三角形の面積は同じ）が，A→B 間で物体の外力のポテンシャルエネルギー変化ΔP がある．A→B 間でのこの変化量 $\Delta P_{\mathrm{B}} - \Delta P_{\mathrm{A}}$ は，図の四角形 ABHC の面積に相当する．

$$\Delta P_{\mathrm{B}} = -Mg(\Delta x_{\mathrm{e}} + \Delta x_{\mathrm{p}}) = \Delta P_{\mathrm{A}} - Mg\,\Delta x_{\mathrm{p}} = \Delta P_{\mathrm{A}} - V\sigma_{\mathrm{Y}}\varepsilon_{\mathrm{p}} \tag{8.20}$$

だから，次式を得る．

$$\Delta G_{\mathrm{B}} = \Delta A_{\mathrm{B}} + \Delta P_{\mathrm{B}} = \Delta A_{\mathrm{A}} + \Delta P_{\mathrm{A}} - V\sigma_{\mathrm{Y}}\varepsilon_{\mathrm{p}} = \Delta G_{\mathrm{A}} - V\sigma_{\mathrm{Y}}\varepsilon_{\mathrm{p}} \tag{8.21}$$

［結論４］によると，一定温度・一定応力下での物体の状態の自発的な変化は，ギブスエネルギーが小さくなる方向に起こる．たとえば，(8.19), (8.21) で σ_{Y} に変化はないから

$$\mathrm{d}(\Delta G_{\mathrm{B}} - \Delta G_{\mathrm{A}}) = -V\sigma_{\mathrm{Y}}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{p}} \tag{8.22}$$

であり，自発変化は $\mathrm{d}(\Delta G_{\mathrm{B}} - \Delta G_{\mathrm{A}}) < 0$ のときに起こる．(8.22) から，これを満足するのは，引張応力（$\sigma_{\mathrm{Y}} > 0$）下で物体が伸びる（$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{p}} > 0$）ときである．すなわち，物体を引張ったとき物体が伸びることは，熱力学からも理にかなったことなのである．

D 点：B 点に達するまでに物体の塑性変形に要した外力の仕事（外力のポテンシャルエネルギー変化ΔP にマイナスを付けた量）は，物体中に残らず，すべて熱や音として外界に散逸する（散逸エネルギー）．また，D 点では，弾性ひずみエネルギーもゼロになり，結果として，熱力学的には，D 点と A 点の状態は等しい．ただ，物体の形が変わった（塑性変形が起こった）だけである．

以上は，加工硬化しない物体について成り立つ話である．もし，物体が加工硬化すれば，物体の塑性変形に要した外力の仕事のうちの一部は，物体のヘルムホルツエネルギー変化分として物体に蓄えられる．これについても興味ある話題が多いが，ここではカバーしない．いずれにせよ，物体の変形に関する議論にも熱力学の考え方が適用できることは知っておいてほしい．

8.4　二つの内部応力場の弾性相互作用エネルギー

図 8.4 のように，物体 V 内に二つの内部応力発生原因 1，2（それぞれ上付き添字 1，2 で表す）が共存する場合の弾性相互作用エネルギーを求めてみよう．微小変形理論に基づくひずみや応力は重ね合わせが効くから，物体に存在する全弾性ひずみエネルギーE_{e1} は次のように表せる．

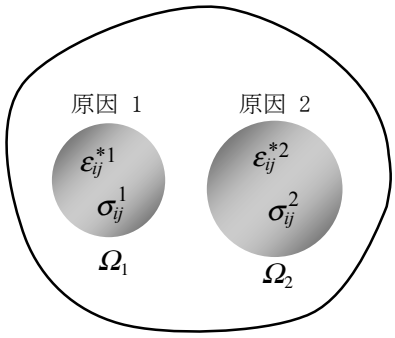

図8.4　内部応力発生原因 1 と 2.

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2)(e_{ij}^1 + e_{ij}^2)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.23}$$

この式の被積分項を展開し，弾性定数の性質(4.2)より

$$\sigma_{ij}^1 e_{ij}^2 = C_{ijkl}e_{kl}^1 e_{ij}^2 = C_{klij}e_{ij}^2 e_{kl}^1 = \sigma_{kl}^2 e_{kl}^1 \tag{8.24}$$

であることを使えば，(8.23) は次式のようになる．

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^1 e_{ij}^1\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^2 e_{ij}^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_V \sigma_{ij}^2 e_{ij}^1\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.25}$$

ここで，右辺の第１項，第２項は，それぞれ原因 1 または 2 のみが存在するときの弾性ひずみエネルギーであるから，第３項の

$$E_{\mathrm{int}} = \int_V \sigma_{ij}^2 e_{ij}^1\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.26}$$

が原因 1，2 の共存によって出現した項，すなわち相互作用を表す項である．

ここで，原因 1 が eigen ひずみ ε_{ij}^{*1} を持つ領域Ω_1 でできているとしよう．そして，6.3 節でガウスの定理を用いて行った書き換えと同様な手続きを(8.26)に対しても適用してみよう．

$$E_{\mathrm{int}} = \int_V \sigma_{ij}^2 e_{ij}^1\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V \sigma_{ij}^2(\varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^{*1})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V \sigma_{ij}^2 u_{i,j}^1\,d\mathbf{x} - \int_V \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^{*1}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.27}$$

第４辺第１項にガウスの定理を適用する．

$$\int_V \sigma_{ij}^2 u_{i,j}^1 \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{|V|} \sigma_{ij}^2 \, u_i^1 n_j \,\mathrm{d}\mathbf{S} - \int_V \sigma_{ij,j}^2 \, u_i^1 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.28}$$

今，原因１も２も内部応力発生原因なので， 応力の境界条件（3.2）より(8. 28)の右辺第１項はゼロである．また，右辺第２項は静的釣り合いの条件(3.3)よりゼロである．結局，二つの内部応力場の弾性相互作用エネルギーは

$$E_{\mathrm{int}} = -\int_V \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^{*1} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.29}$$

となる．領域Ω_1内に均一な eigen ひずみε_{ij}^{*1}が局在する場合でも，原因 2 による内部応力σ_{ij}^2がΩ_1内で均一でなければこの積分はこれ以上簡単にはならないが，もし均一ならば(8. 29)は

$$E_{\mathrm{int}} = -\Omega_1 \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^{*1} \tag{8.30}$$

と簡単になる．(8.29)，(8.30)式は，たとえば転位と固溶原子や析出物などとの相互作用を考察するときに必ず使う有用な式であり，この講義の後半で使うかもしれない．

8.5　外部応力と内部応力の相互作用エネルギー（その１）

図 8.5 のように，外部応力σ_{ij}^{A}は，物体 V の表面 $|V|$（n_j:単位法線ベクトル）に一定の面力 X_i を作用させることによって作られるとする．X_i によって作られる変位，ひずみ，応力などを上付き添字 A によって表わす．外部応力σ_{ij}^{A}と内部応力σ_{ij}が共存するとき，V に含まれる弾性ひずみエネルギー（ヘルムホルツエネルギー） E_{el}は

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{el}} &= \frac{1}{2}\int_V (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\mathrm{A}})(e_{ij} + e_{ij}^{\mathrm{A}}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} e_{ij} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{A}} e_{ij}^{\mathrm{A}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_V \sigma_{ij} u_{i,j}^{\mathrm{A}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{8.31}$$

となる．ここで， $e_{ij}^{\mathrm{A}} = (u_{i,j}^{\mathrm{A}} + u_{j,i}^{\mathrm{A}})/2$ を使った．(8.31)の第３辺第１項は内部応力のみ存在するときの弾性ひずみエネルギー，第２項は外力のみ存在するときの弾性ひずみエネルギーなので，第３項が外力と内部応力が共存するときの相互作用の弾性ひずみエネルギーを表す．しかし，第３項に再びガウスの定理を使い， σ_{ij} が内部応力であることに注意すると，前節と同じ議論から，(8.31)の第３項はゼロになることがわかる．これは，外部応力と内部応力は，弾性ひずみエネルギー（ヘルムホルツエネルギー）に関しては相互作用を持たないこと意味している．これをコロネティ（Collonetti）の定理という．

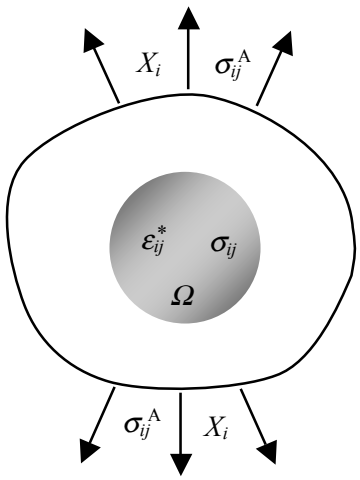

図8.5　外部応力と内部応力．

8.1～8.3 節で述べたように，温度一定での物体の力学状態の変化を考えるときには，物体の弾性ひずみエネルギーは熱力学的には物体のヘルムホルツエネルギーと考えることができる．一方，温度一定，外力一定下での物体の力学状態の変化は，弾性ひずみエネルギー変化と外力のポテンシャルエネルギー変化の双方を考えたギブスエネルギー変化を用いて考察すべきである．そこで，まず，外力と内部応力が共存したときの全ギブスエネルギー G を考えてみる．

$$G = E_{\mathrm{el}} - \int_{|V|} X_i \,(u_i + u_i^{\mathrm{A}}) \,\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{8.32}$$

右辺第１項の E_{el} は(8.31)のヘルムホルツエネルギー(弾性ひずみエネルギー)である．右辺第２項は，物体におもりをぶら下げたことによるおもりの位置エネルギー変化である．相互作用にはヘルムホルツエネルギーの寄与がないことはコロネティの定理で証明されたので，外力のポテンシャルエネルギーの中に現れる相互作用だけを考えればよい．この相互作用 G_{I} は

$$G_{\mathrm{I}} = -\int_{|V|} X_i\, u_i \,\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{8.33}$$

である．これは，面力 X_i と内部応力が物体表面に作る変位 u_i の積を物体表面 $|V|$ 全体にわたって積分したものである．

内部応力が eigen ひずみ ε_{ij}^* を持つ領域によって発生している場合，(8.33)は

$$G_{\mathrm{I}} = -\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{A}}\, \varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{8.34}$$

と書ける．この証明は，次のようにガウスの定理を使って考えればできる.すなわち

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{I}} &= -\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{A}}\, \varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{A}}\, (u_{i,j} - e_{ij}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= -\int_{|V|} \sigma_{ij}^{\mathrm{A}}\, u_i\, n_j \,\mathrm{d}\mathbf{S} + \int_V \sigma_{ij,j}^{\mathrm{A}}\, u_i \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{A}}\, e_{ij} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{8.35}$$

であるが，第１項は $\sigma_{ij}^{\mathrm{A}} n_j = X_i$，第２項はゼロ，第３項もコロネティの定理でゼロになる．

前と同様に，eigen ひずみ ε_{ij}^* が領域 Ω 内に局在し，その中で外部応力 σ_{ij}^{A} も均一な場合は，(8.34)は次のように簡単になって積分を要しない．

$$G_{\mathrm{I}} = -\Omega\, \sigma_{ij}^{\mathrm{A}}\, \varepsilon_{ij}^* \tag{8.36}$$

(8.34)，(8.36)は，外力付加によって相変態や析出が起こる場合の解析によく使う有用な式である．

★8.6　外部応力と内部応力の相互作用（その２）

ここまでの議論では，弾性定数の均一性はどこにも使ってなかった．したがって今まで出てきた eigen ひずみには，等価介在物のものではなく，実際の eigen ひずみを用いる必要がある．

一方，等価介在物Ｉ（7.2 節参照）で学んだように，弾性定数の異なる領域を含む物体のエネルギー論では，弾性不均一によって乱された外部応力 $\sigma_{ij}^{\mathrm{o}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{p}}$ ではなく，乱される前の外部応力 σ_{ij}^{o} を使って議論したいことがある．乱される前の量には上付きの o，乱された分には上付きの p を用いてギブスエネルギーを表すと，

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}\int_V (\sigma_{ij}^{\mathrm{o}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{p}})(e_{ij}^{\mathrm{o}} + e_{ij}^{\mathrm{p}}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{|V|} X_i\, (u_i^{\mathrm{o}} + u_i^{\mathrm{p}}) \,\mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \left(\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} e_{ij}^{\mathrm{o}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{|V|} X_i\, u_i^{\mathrm{o}} \,\mathrm{d}\mathbf{S} \right) \\ &\qquad + \left(\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} e_{ij}^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} e_{ij}^{\mathrm{o}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} e_{ij}^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{|V|} X_i\, u_i^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{S} \right) \end{aligned} \tag{8.37}$$

第３辺第１項は，弾性不均一がない場合のギブスエネルギーなので，第２項の括弧の中が外力と弾性不均一の相互作用のギブスエネルギーである．これを $G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}}$ と書く．すなわち，

$$G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} e_{ij}^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} e_{ij}^{\mathrm{o}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} e_{ij}^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{|V|} X_i\, u_i^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{8.38}$$

ガウスの定理を使うと，(8.38)の右辺第２項，第３項がゼロになることがいえて，

$$G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} e_{ij}^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{|V|} X_i\, u_i^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{S} = \Delta E + \Delta P \tag{8.39}$$

を得る．第２辺第１項は，弾性不均一があるための弾性ひずみエネルギー（ヘルムホルツエネルギー）の変化 ΔE，第２項は同じ理由の外力ポテンシャルエネルギーの変化 ΔP である．ところが，$\sigma_{ij}^{\mathrm{o}} n_j = X_i$，$\sigma_{ij,j}^{\mathrm{o}} = 0$ に注意すると，

$$\Delta E = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} e_{ij}^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} u_{i,j}^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_{|V|} \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} u_i^{\mathrm{p}} n_j \,\mathrm{d}\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij,j}^{\mathrm{o}} u_i^{\mathrm{p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{|V|} X_i\, u_i^{\mathrm{p}}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = -\Delta P / 2 \tag{8.40}$$

が成り立つ．したがって，

$$G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}} = -\Delta E = \Delta P / 2 \tag{8.41}$$

を得る．(8.33)から(8.36)までの手続きと同様に，ΔP は等価介在物 I の eigen ひずみを使って

$$\Delta P = -\Omega\, \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} \varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}} \tag{8.42}$$

と表せることがわかり，結局，次式が得られる．

$$\Delta E = \Omega\, \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} \varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}} / 2 \tag{8.43}$$

$$G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}} = -\Omega\, \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} \varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}} / 2 \tag{8.44}$$

第８章練習問題

問題 8.1　fcc→bcc マルテンサイト変態においては，ベイン（Bain）変形と呼ばれる格子変形が起こる．すなわち，図 8.6 のベイン対応において，$[001]_{\mathrm{f}}$ 方向に格子が縮み，$[100]_{\mathrm{f}}$，$[010]_{\mathrm{f}}$ 方向に格子が伸びれば fcc 格子が bcc 格子に変化すると考える．この変態ひずみを fcc 格子を基準にした座標系 (x_1, x_2, x_3) で表せば，

$$\varepsilon_{ij}^{*} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

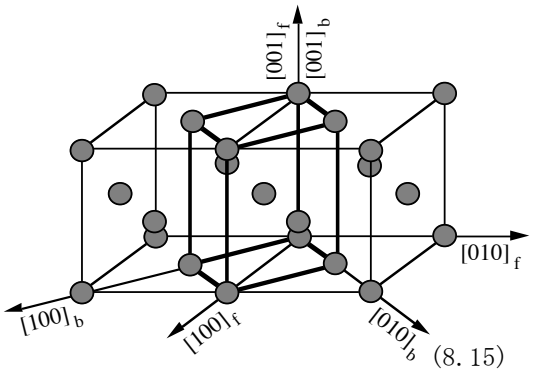

図 8.6　fcc と bcc の間のベイン対応．

となる．鉄鋼材料では，$\varepsilon_1 = 0.12$，　$\varepsilon_3 = -0.20$ 程度である．このベイン変形には他に下の２つの結晶学的に等価なバリアントがあり，それぞれ格子の縮む方向が $[100]_{\mathrm{f}}$, $[010]_{\mathrm{f}}$ 方向である．

$$\varepsilon_{ij}^{*} = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_{ij}^{*} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \tag{8.45}$$

今，このマルテンサイト変態を応力誘起で起こすために，fcc 母相を $[001]_{\mathrm{f}}$ 方向から引張るとする．そのとき，３つのバリアントのうち，どのバリアントが優先的に発生するかを(8.36)式を用いて議論せよ．ただし，(8.36)の値が負でその絶対値が最も大きなバリアントが熱力学的に最も発生しやすいものである．

★問題 8.2　第７章の例題 7.2 で得られた等価介在物 I の（仮想的な）eigen ひずみ $\varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}}$ を使って，物体に半径 a の球状ボイドが生成したときの弾性ひずみエネルギー変化 ΔE，外力ポテンシャルエネルギー変化 ΔP およびギブスエネルギー変化 $G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}}$ を求めよ．

★問題 8.3　（グリフィスクラック，グリフィスの脆性破壊の式）

図 8.7 のように，一軸引張方向 x_3 軸に垂直な半径 a の円盤状クラック W を考える．

$$\Omega:\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \le 1, \quad a / c >> 1$$

(1) 外部応力 $\sigma_{33}^{o} = \sigma^{o}$（他の σ_{ij}^{o} はゼロ）が付加された状態で，クラックの発生前を基準として，発生後のエネルギー変化を考える．問題 7.3 の等価介在物 I の解 $\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}}$ を a_3 を c に，a_1 を a に読み替えて使い，(8.43)から半径 a の円盤状クラック発生に伴う弾性ひずみエネルギー変化 ΔE を求めよ．

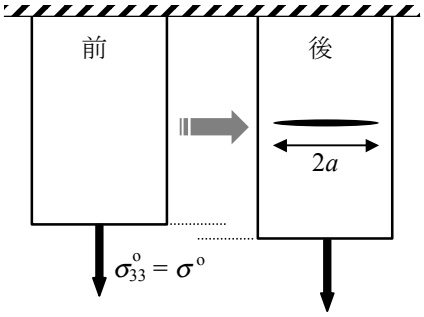

図 8.7　円盤状クラックの成長．

(2) クラック発生に伴うヘルムホルツエネルギー変化 ΔF には，上記の ΔE に加えて，クラック表面の表面エネルギーの増加分 ΔE_{s} も考慮する必要がある．単位面積あたりの表面エネルギーを Γ，クラックの表面積を（上下の表面で）$2\pi a^2$ としたとき，$\Delta F = \Delta E + \Delta E_{\mathrm{s}}$ を σ^{o} や a を含む表現で陽に表せ．

(3) (8.42)を使って ΔP を求めよ．

(4) クラック発生に伴うギブスエネルギー変化 $G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}} = \Delta F + \Delta P$ を σ^{o} や a を含む表現で陽に表せ．

(5) このクラックの安定性（成長するかしないか）は，クラックの大きさ a が増加するとき $G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}}$ が増加するか減少するか（$G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{m}}$ を a で微分した式の符号が正か負か）で判別することができる．これから，クラックが成長する臨界の大きさ a_{c} を求めよ．