第７章　楕円体介在物（Eshelby 問題）

7.1　楕円体介在物とエシェルビーテンソル

図 7.1 のように，無限大母相の中に埋まった楕円体形状の領域（以後，介在物（inclusion）とよぶ）Ω を考える．

$$\Omega:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\le 1 \qquad (7.1)$$

ただし，a_1, a_2, a_3 は正とする．天才エシェルビー（Eshelby）は，Ωの中のみに一様な eigen ひずみ ε_{ij}^* を持つ場合，Ω内の全ひずみ ε_{ij} も次式で表されるように一様になることを証明した．

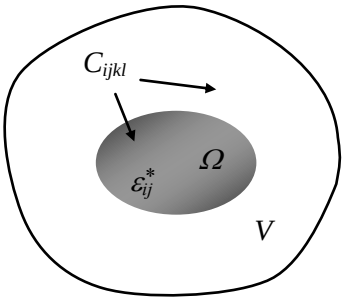

図7.1　母相 V に囲まれ，eigenひずみ ε_{ij}^* を持つ楕円体介在物Ω.

$$\varepsilon_{ij}=S_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^* \qquad (7.2)$$

S_{ijkl} はエシェルビーテンソルとよばれ，等方体の場合，ポアソン比と楕円体の形のみの関数で，楕円体の大きさには依存しない．また，$S_{ijkl}=S_{jikl}=S_{ijlk}$ であり，１つの指標が奇数回含まれるものはゼロである．

ε_{ij}^* もε_{ij} もΩの中で一様ならば，次式で求まる応力σ_{ij} もΩの中では一様になる．

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^*)=C_{ijkl}(S_{klmn}\varepsilon_{mn}^*-\varepsilon_{kl}^*) \qquad (7.3)$$

エシェルビーは，さまざまな楕円体形状についての S_{ijkl} の求め方も教えてくれており，それは下記の文献に示されている．

- 村外志夫，森勉：マイクロメカニックス，破壊力学と材料強度講座 5，培風館（1976）.
- T. Mura: Micromechanics of Defects in Solids, 2nd rev.,　Martinus Nijhoff (1987).

以下に代表的な形状の楕円体介在物についての S_{ijkl} をまとめて示す．より一般的な楕円体形状の場合の S_{ijkl} については，上記の文献を参照されたい．

（i）球（$a_1=a_2=a_3$）

$$\begin{aligned}
&S_{1111}=S_{2222}=S_{3333}=(7-5\nu)/\{15(1-\nu)\}\\
&S_{1122}=S_{2233}=S_{3311}=-(1-5\nu)/\{15(1-\nu)\}\\
&S_{1212}=S_{2323}=S_{3131}=(4-5\nu)/\{15(1-\nu)\}
\end{aligned} \qquad (7.4)$$

他の等価な成分は指標をサイクリックに交換して求められる．

（ii）円盤（$a_1=a_2,\quad a_3/a_1\to 0$）

$$\begin{aligned}
&S_{1111}=S_{2222}=0,\quad S_{3333}=1\\
&S_{1122}=S_{2211}=0,\quad S_{1133}=S_{2233}=0\\
&S_{3311}=S_{3322}=\nu/(1-\nu)\\
&S_{1212}=0,\quad S_{1313}=S_{2323}=1/2
\end{aligned} \qquad (7.5)$$

（iii）針（$a_1=a_2,\quad a_3/a_1\to\infty$）

$$\begin{aligned}
&S_{1111}=S_{2222}=(5-4\nu)/\{8(1-\nu)\},\quad S_{3333}=0\\
&S_{1122}=S_{2211}=-(1-4\nu)/\{8(1-\nu)\},\quad S_{3311}=S_{3322}=0\\
&S_{1133}=S_{2233}=\nu/\{2(1-\nu)\},\quad S_{1212}=(3-4\nu)/\{8(1-\nu)\}\\
&S_{1313}=S_{2323}=1/4
\end{aligned} \qquad (7.6)$$

我々としては既知の S_{ijkl} を使うのみであるが，そのとき(6.32)が光を放つ．すなわち，ε^*_{ij} は Ω 内のみに存在し Ω の外側ではゼロ，しかも，ε^*_{ij} も σ_{ij} も Ω 内で一様なので，(6.32)の弾性ひずみエネルギーは

$$E_{\mathrm{el}} = -\Omega\,\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}/2 = -\Omega C_{ijkl}(S_{klmn}\varepsilon^*_{mn} - \varepsilon^*_{kl})\,\varepsilon^*_{ij}/2 \tag{7.7}$$

と，積分の必要がなくなって，単なるかけ算のみで求めることができる．一方，もし(4.14)しか知らなかったら，介在物の外側の複雑な弾性場も求めて，しかもそれを物体全体にわたって積分する必要があり，これは大変な作業になるであろう．なお，(7.7)は，無限大母相中に１個の介在物が存在する場合に物体全体の持つ弾性ひずみエネルギーである．

例題 7.1（球状整合介在物） 球状（$a_1 = a_2 = a_3$）介在物 Ω が純粋膨張（または収縮）型 eigen ひずみ

$$\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon^*\delta_{ij}\,,\ (\varepsilon^*\ :\text{定数}) \tag{7.8}$$

を持つ場合の弾性ひずみエネルギーを求めてみよう．ここで δ_{ij} は(4.4)で定義したクロネッカーのデルタであり，(7.8)のような eigen ひずみを δ_{ij} 型ともいう．たとえば，球状析出物が周囲の母相と同じ結晶構造を持つが，格子定数が若干異なる場合などは，この例題の具体例である．そのときは，上式の ε^* としてミスフィットひずみ（格子定数の差を母相の格子定数で割った量）をとればよい．

まず(7.2)を，たとえば ε_{11} について陽に書き下すと次のようになる．

$$\varepsilon_{11} = S_{11kl}\varepsilon^*_{kl} = S_{1111}\varepsilon^*_{11} + S_{1122}\varepsilon^*_{22} + S_{1133}\varepsilon^*_{33} = (S_{1111} + S_{1122} + S_{1133})\,\varepsilon^*$$

これに(7.4)のエシェルビーテンソルを代入すれば，Ω 内の全ひずみ ε_{ij} のゼロでない成分が下のように求まる．

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\,\varepsilon^* \tag{7.9}$$

Ω 内の応力 σ_{ij} は(7.3)から，たとえば σ_{11} について

$$\sigma_{11} = C_{1111}(\varepsilon_{11} - \varepsilon^*_{11}) + C_{1122}(\varepsilon_{22} - \varepsilon^*_{22}) + C_{1133}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^*_{33})$$

となる．弾性定数 C_{ijkl} には(4.3)を用い，(4.8)の３番目の式から λ を消去すると，Ω 内の応力 σ_{ij} は次のように求まる．

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{4\mu(1+\nu)}{3(1-\nu)}\,\varepsilon^* \tag{7.10}$$

以上から，Ω の存在による弾性ひずみエネルギー E_{el} は(7.7)を用いて

$$E_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}\Omega(\sigma_{11}\varepsilon^*_{11} + \sigma_{22}\varepsilon^*_{22} + \sigma_{33}\varepsilon^*_{33}) = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-\nu}\,\Omega(\varepsilon^*)^2 \tag{7.11}$$

となることがわかる．E_{el} は必ず正（またはゼロ）の量となる．

★7.2　等価介在物Ⅰ

有り難いことに，エシェルビーはさらに，介在物 Ω の弾性定数が周囲の母相と異なる場合の弾性場と弾性ひずみエネルギーの計算法まで教えてくれた．これによって，エシェルビー理論はボイドやクラックの問題にまで適用できる非常に強力な手法となったのである．

まずは，「等価介在物Ⅰ」と呼ばれる概念を紹介する．**図 7.2**(a)のように弾性定数 C_{ijkl} がどこでも同じ均一（homogeneous）な物体に外力を付加すると，物体中には一様な応力 σ^0_{ij} と弾性ひずみ e^0_{ij} が発生する．一方，(b)のように，物体中に周囲の母相と異なる弾性定数 C^*_{ijkl} を持つ楕円体領域（弾性不均一，

elastic inhomogeneity，という）Ωがあれば，物体中の応力は乱されて $\sigma_{ij}^{\mathrm{a}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{p}}$ となる．ここで σ_{ij}^{p} は物体中の場所に依存する乱された応力である．等価介在物 I の概念は，楕円体弾性不均一Ω中の σ_{ij}^{p} や弾性ひずみの乱され分 e_{ij}^{p} が，周囲と同じ弾性定数と仮想的な eigen ひずみ $\varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}}$ を持つΩと同じ形の介在物中の応力と全ひずみで再現できる（図 7.2(c)）というものである．

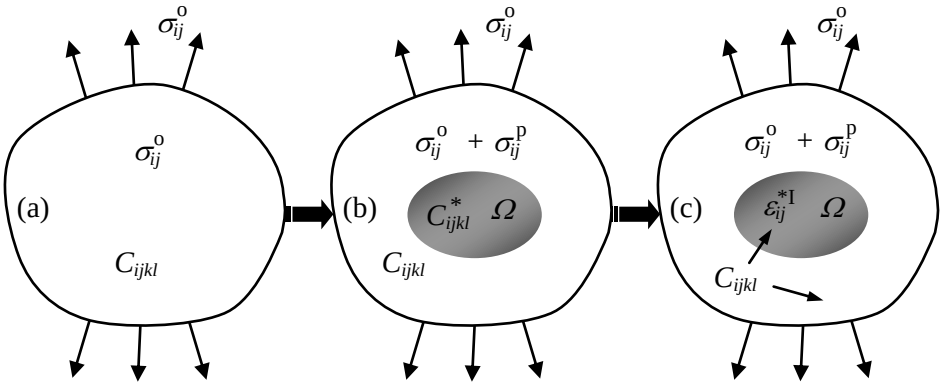

図7.2　等価介在物 I.

この再現が可能であれば，図 7.2(b)に対して

$$\Omega\text{の中：}\ \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} = C_{ijkl}^{*}(e_{kl}^{\mathrm{o}} + e_{kl}^{\mathrm{p}}) \tag{7.12}$$

$$\Omega\text{の外：}\ \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} = C_{ijkl}(e_{kl}^{\mathrm{o}} + e_{kl}^{\mathrm{p}}) \tag{7.13}$$

が成り立つので e_{kl}^{p} は弾性不均一の存在のために乱された場所に依存する弾性ひずみであるが，図 7.2(b)にはどこにも eigen ひずみはないから，Ωの中外に関わらず全ひずみの乱され分 $\varepsilon_{kl}^{\mathrm{p}}$ でもあり，$\varepsilon_{kl}^{\mathrm{p}} = e_{kl}^{\mathrm{p}}$ である．

一方，もし上記の等価介在物 I の eigen ひずみ $\varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}}$ で弾性場が再現されるのなら，図 7.2(c)のΩの中では次式が成り立つはずである．

$$\Omega\text{の中：}\ \sigma_{ij}^{\mathrm{o}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} = C_{ijkl}\, e_{kl}^{\mathrm{o}} + C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^{\mathrm{p}} - \varepsilon_{kl}^{*\mathrm{I}}) \tag{7.14}$$

右辺第２項が乱され分を表す．エシェルビー理論によれば，Ωが楕円体で $\varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}}$ がΩの中で均一のとき，乱され分 $\varepsilon_{kl}^{\mathrm{p}}$ も応力 σ_{ij}^{p} もΩの中で均一になり，$\varepsilon_{kl}^{\mathrm{p}}$ について(7.2)式，すなわち

$$\Omega\text{の中：}\ \varepsilon_{kl}^{\mathrm{p}}(= e_{kl}^{\mathrm{p}}) = S_{klmn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} \tag{7.15}$$

が成り立つ．(7.12)，(7.14)，(7.15)から

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{o}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{p}} = C_{ijkl}^{*}(e_{kl}^{\mathrm{o}} + S_{klmn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}}) = C_{ijkl}(e_{kl}^{\mathrm{o}} + S_{klmn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{kl}^{*\mathrm{I}}) \tag{7.16}$$

この式の第２辺と第３辺は $\varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}}$ を未知数とする連立方程式となり，他の量は既知なので，これは解ける．今では数学ソフトによって連立方程式も容易に解けるらしいが，ここは，やはり手計算の努力を惜しまない方が理解が進む．

例題 7.2（球状ボイド）図 7.3 のように弾性定数 C_{ijkl} を持つ無限に大きな物体中に球状のボイド（穴）がある．この物体の無限遠方から一軸外部応力 $\sigma_{33} = \sigma^{\mathrm{o}}$ を付加したとき，ボイドの存在のために，ボイド付近で応力が乱れる．この乱れを再現する等価介在物 I の eigen ひずみ $\varepsilon_{ij}^{*\mathrm{I}}$ を求めよう．

ボイドがないときの弾性ひずみは(4.10)式から

$$e_{11}^{\mathrm{o}} = e_{22}^{\mathrm{o}} = -\nu\sigma^{\mathrm{o}} / E = -\nu\sigma^{\mathrm{o}} / \{2\mu(1+\nu)\}, \qquad e_{33}^{\mathrm{o}} = \sigma^{\mathrm{o}} / E = \sigma^{\mathrm{o}} / \{2\mu(1+\nu)\} \tag{7.17}$$

となる．ただし(4.8)の関係からヤング率を消去し，さらに，問題設定の対称性から $e_{11}^{\mathrm{o}} = e_{22}^{\mathrm{o}}$ は自明とした．ここで(7.16)の連立方程式を解けばよいが，ボイドの中では $C_{ijkl}^{*} = 0$ なので，(7.16)の第２辺はゼロとなって簡単になる．そこで第３辺を計算してみる．ただし，対称性から $\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} = \varepsilon_{22}^{*\mathrm{I}}$ などは自明である．また，エシェルビーテンソル S_{ijkl} には，球の(7.4)式を使う．

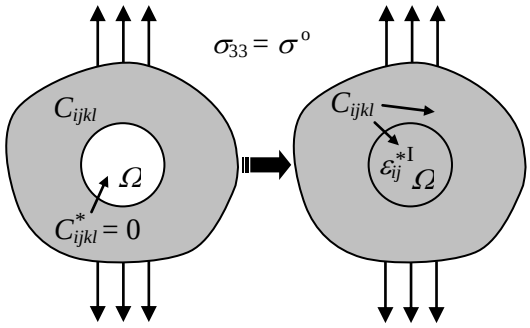

図7.3　外部応力 $\sigma_{33} = \sigma^{\mathrm{o}}$下の球状ボイド．

(i) $i = j = 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
0 &= C_{11kl}(e_{kl}^{\mathrm{o}} + S_{klmn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{kl}^{*\mathrm{I}}) \\
&= C_{1111}(e_{11}^{\mathrm{o}} + S_{11mn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}}) + C_{1122}(e_{22}^{\mathrm{o}} + S_{22mn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{22}^{*\mathrm{I}}) + C_{1133}(e_{33}^{\mathrm{o}} + S_{33mn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}}) \\
&= (C_{1111} + C_{1122})(e_{11}^{\mathrm{o}} + S_{11mn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}}) + C_{1133}(e_{33}^{\mathrm{o}} + S_{33mn}\varepsilon_{mn}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}}) \\
&= (C_{1111} + C_{1122})(e_{11}^{\mathrm{o}} + S_{1111}\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} + S_{1122}\varepsilon_{22}^{*\mathrm{I}} + S_{1133}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}}) \\
&\qquad + C_{1133}(e_{33}^{\mathrm{o}} + S_{3311}\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} + S_{3322}\varepsilon_{22}^{*\mathrm{I}} + S_{3333}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}}) \\
&= (2\lambda + 2\mu)\{e_{11}^{\mathrm{o}} + (S_{1111} + S_{1122})\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} + S_{1133}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}}\} \\
&\qquad + \lambda\{e_{33}^{\mathrm{o}} + (S_{3311} + S_{3322})\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} + S_{3333}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}}\} \\
&= \frac{2\mu}{(1-2\nu)}\left\{-\frac{\nu\sigma^{\mathrm{o}}}{2\mu(1+\nu)} + \frac{6}{15(1-\nu)}\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} - \frac{1-5\nu}{15(1-\nu)}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}}\right\} \\
&\qquad + \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}\left\{\frac{\sigma^{\mathrm{o}}}{2\mu(1+\nu)} - \frac{2(1-5\nu)}{15(1-\nu)}\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} + \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} - \varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}}\right\}
\end{aligned}
$$

(最後の辺)$= 0$ を解くと，σ^{o} を含む項がうまく消えて次式を得る．

$$
\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}}(= \varepsilon_{22}^{*\mathrm{I}}) = -\frac{1+5\nu}{9+5\nu}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} \tag{7.18}
$$

(ii) $i = j = 3$ のとき

上と同様な計算を行うと

$$
\sigma^{\mathrm{o}} - \frac{4\mu(1+5\nu)}{15(1-\nu)}\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} - \frac{16\mu}{15(1-\nu)}\varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} = 0 \tag{7.19}
$$

を得る．(7.18)，(7.19)の連立方程式を解くと次式が求まる．

$$
\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} = \varepsilon_{22}^{*\mathrm{I}} = -\frac{3(1-\nu)(1+5\nu)}{4\mu(1+\nu)(7-5\nu)}\sigma^{\mathrm{o}}, \qquad \varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} = \frac{3(1-\nu)(9+5\nu)}{4\mu(1+\nu)(7-5\nu)}\sigma^{\mathrm{o}} \tag{7.20a}
$$

または

$$
\varepsilon_{11}^{*\mathrm{I}} = \varepsilon_{22}^{*\mathrm{I}} = -\frac{3(1-\nu)(1+5\nu)}{2(7-5\nu)}\left(\frac{\sigma^{\mathrm{o}}}{E}\right), \qquad \varepsilon_{33}^{*\mathrm{I}} = \frac{3(1-\nu)(9+5\nu)}{2(7-5\nu)}\left(\frac{\sigma^{\mathrm{o}}}{E}\right) \tag{7.20b}
$$

★7.3　等価介在物 II

弾性定数 C_{ijkl} の無限大母相中に，eigen ひずみ ε_{ij}^{*} を持ち弾性定数が C_{ijkl}^{*} の介在物（不均一介在物，inhomogeneous inclusion）Ωが存在するとき（**図 7.4**(a)），エシェルビーはΩ内の応力が次式を満た

すことも教えてくれた.

$$\sigma_{ij} = C^*_{ijkl}(S_{klmn}\varepsilon^{*\mathrm{II}}_{mn} - \varepsilon^*_{kl}) = C_{ijkl}(S_{klmn}\varepsilon^{*\mathrm{II}}_{mn} - \varepsilon^{*\mathrm{II}}_{kl}) \tag{7.21}$$

ここで $\varepsilon^{*\mathrm{II}}_{ij}$ は，Ωと同じ大きさと形を持つが,弾性定数が母相と同じ仮想的な等価介在物 II(図 7.4(b))の eigen ひずみで，(7.21)の第２辺と第３辺が作る連立方程式を解けば求まるものである．得られた等価介在物の eigen ひずみを(7.21)に代入すれば,W内の全ひずみ $\varepsilon_{kl} = S_{klmn}\varepsilon^{*\mathrm{II}}_{mn}$ と応力σ_{ij}が求まる．また，弾性ひずみエネルギーも(6.32)から得られる．

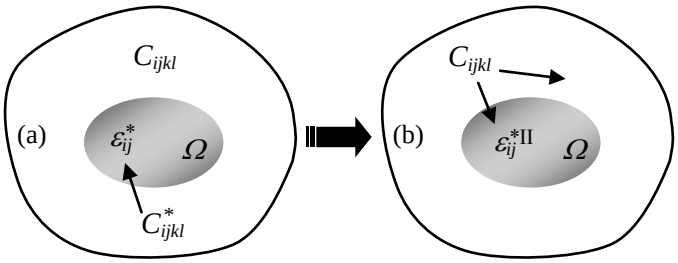

図7.4　等価介在物 II.

なお，第６章で扱った弾性ひずみエネルギー計算には，弾性定数の均一性はどこにも仮定されていなかった．そこで，不均一介在物の持つ弾性ひずみエネルギーを計算する際にも，等価介在物 II の eigen ひずみ $\varepsilon^{*\mathrm{II}}_{ij}$ ではなく，実際の eigen ひずみ ε^*_{ij} そのものを使って

$$E_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}\Omega\,\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} \tag{7.22}$$

と求めなくてはならない.

第７章練習問題

問題 7.1　例題 7.1 では球状の整合介在物を考えたが，同様な考察を円盤状および針状の整合介在物（eigen ひずみは(7.8)と同じ）について行い，Ω内の全ひずみε_{ij}，応力σ_{ij}，およびΩの存在による弾性ひずみエネルギーE_{el}を求めよ.

問題 7.2　上問を解くと，興味あることに気付く．すなわち，(i)等方体，(ii)弾性定数は母相と介在物で同じ，(iii)eigen ひずみはδ_{ij} 型，の３つの条件が満足されれば，弾性ひずみエネルギーは介在物の形によらないという事実である．これが物理的に何に由来しているか考えてみよ.

★問題 7.3　例題 7.2 では球状のボイドを考えたが，同様な考察を，物体の無限遠方から一軸外部応力 $\sigma_{33} = \sigma^{\mathrm{o}}$ を付加した円盤状クラックについて行い，$\varepsilon^{*\mathrm{I}}_{33}$ を求めよ.

（ヒント）(7.5)のような円盤状クラックを考えるのであるが，球状ボイドと同様に計算すると $\varepsilon^{*\mathrm{I}}_{33}$ を求める過程で困難に出会う．ここは $\lim_{a_3\to 0} a_3\varepsilon^{*\mathrm{I}}_{33} = \varepsilon^*$ とおいて，ε^* を有限値として計算せよ.

解答：$\varepsilon^{*\mathrm{I}}_{33} = \dfrac{4(1-\nu^2)}{\pi}\left(\dfrac{a_1}{a_3}\right)\left(\dfrac{\sigma^{\mathrm{o}}}{E}\right)$

★問題 7.4　母相の弾性定数を C_{ijkl}，介在物の弾性定数を $C^*_{ijkl} = f\,C_{ijkl}$（$0 < f < \infty$）としたとき，$\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon^*\delta_{ij}$ なる eigen ひずみを持つ球，円盤，針の３種類の不均一楕円体介在物について，単位体積あたりの弾性ひずみエネルギーE_{o}を求め，縦軸を E_{o}，横軸を f（$10^{-2} \le f \le 10^2$）にとった両対数グラフをかけ.