第６章　弾性場の求め方

6.1　eigen ひずみ

(1.8)で定義したひずみε_{ij}には，フックの法則を通じて応力と結びつく弾性ひずみ e_{ij} と応力とは結びつかないひずみ ε^*_{ij} がある．後者のひずみはそれが物体内に均一に発生しても何の応力も生じない．たとえば塑性ひずみ，熱膨張ひずみ，変態ひずみ，ミスフィットひずみなどがその範疇に属する．これらをまとめて eigen ひずみ（eigenstrain）とよぶ．

例として図 6.1 のような引張試験での応力–ひずみ曲線を考えよう．簡単のため，加工硬化は考えないものとする．O→A 間は弾性変形で原点を通る直線になる．引張試験の場合，その傾き E はヤング率である．A 点で除荷すると， A→O と逆向きの経路を辿って O に戻る．A→B 間は塑性変形であり，B 点で変形をやめて除荷すると，B→A→O とは戻らずに，C 点に達し，直線 BC の傾きは E である．さて，B 点での全ひずみεは直線 OD の長さに等しく，それは塑性ひずみ ε^* と弾性ひずみ e の和として表される．すなわち，

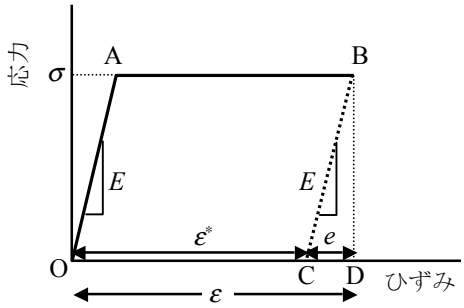

図 6.1　加工硬化しない材料の引張試験での応力–ひずみ曲線

$$\varepsilon = \varepsilon^* + e \tag{6.1}$$

一方，B 点での応力 σ は，(6.1)のうちの弾性ひずみとのみフックの法則を通じて

$$\sigma = E\,e = E(\varepsilon - \varepsilon^*) \tag{6.2}$$

と結ばれる．このように，塑性ひずみ ε^* は（それが物体内で均一に発生する限り）如何に大きくても，応力とは結びつかないひずみで，eigen ひずみの一種ということになる．

(6.1)，(6.2)を一般化すると次式のようになる．

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^*_{ij} + e_{ij} \tag{6.3}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,e_{kl} = C_{ijkl}\,(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^*_{kl}) \tag{6.4}$$

塑性ひずみ以外でも，熱膨張ひずみ，変態ひずみ，ミスフィットひずみなどが eigen ひずみであることはある程度は理解できるであろうが，必要になったときにこのことを繰り返して説明する．

6.2　周期解

eigen ひずみが物体内で均一に発生しても応力は発生しないことを述べたが，もし物体内で不均一に発生したら，それは弾性ひずみを生じ，応力（内部応力）が発生する．以下にこのことを考察する．(2.8)のひずみの定義および(4.2)の弾性定数の性質を使って(6.4)を書き換えると

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^*_{kl}) = C_{ijkl}\,(u_{k,l} - \varepsilon^*_{kl}) = C_{ijkl}\,u_{k,l} - C_{ijkl}\,\varepsilon^*_{kl} \tag{6.5}$$

となる．これと内部応力問題の静的釣り合いの式(3.3)より

$$C_{ijkl}\,u_{k,lj} = C_{ijkl}\,\varepsilon^*_{kl,j} \tag{6.6}$$

が得られる．ここで $u_{k,lj} \equiv \partial^2 u_k / (\partial x_l\,\partial x_j)$， $\varepsilon^*_{kl,j} \equiv \partial \varepsilon^*_{kl} / \partial x_j$ である．

今，無限に大きい物体中に不均一に（場所によって変化して）発生する eigen ひずみを場所（位置

ベクトル $\mathbf{x}$）の関数として次のような周期的な形で表そう[1].

$$\varepsilon_{ij}^{*}(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon}_{ij}^{*}(\boldsymbol{\xi})\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}) \tag{6.7}$$

ここで $\bar{\varepsilon}_{ij}^{*}(\boldsymbol{\xi})$ は振幅，$i=\sqrt{-1}$，$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x} \equiv \xi_i x_i \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$ はベクトル $\boldsymbol{\xi}$ と $\mathbf{x}$ の内積である．上式で物理的な意味を持つのはもちろん実数部である．これを正弦（または余弦）関数で虚数を含まない形で表してもよいが，後に式を微分することがあるので(6.7)の形にしておいた方が便利である．

(6.7)の eigen ひずみが既知のとき，もし変位 $u_i(\mathbf{x})$ を求めることができれば，(6.5)，(6.6)から弾性ひずみ場や応力場が求められることになる．$u_i(\mathbf{x})$ も当然 $\varepsilon_{ij}^{*}(\mathbf{x})$ と同じ周期の関数となるはずなので

$$u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi})\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}) \tag{6.8}$$

と書ける．(6.7)，(6.8)を(6.6)に代入すれば次式を得る．

$$C_{ijkl}\,\bar{u}_k\,\xi_l\xi_j = -i\,C_{ijkl}\,\bar{\varepsilon}_{kl}^{*}\,\xi_j \tag{6.9}$$

この式は，$\bar{\varepsilon}_{kl}^{*}$ が既知のとき $\bar{u}_k$ を求める３つの連立１次方程式を与える．ここで

$$K_{ik}(\boldsymbol{\xi}) \equiv C_{ijkl}\,\xi_l\xi_j\,, \quad A_i \equiv -i\,C_{ijkl}\,\bar{\varepsilon}_{kl}^{*}\,\xi_j \tag{6.10}$$

とおけば，(6.9)は以下の連立方程式になる．

$$K_{ik}\bar{u}_k = A_i \tag{6.11}$$

連立方程式の解を求めるのに，クラメルの公式（Cramer's formula）を使うと，

$$\bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = A_j N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) / D(\boldsymbol{\xi}) \tag{6.12}$$

と $\bar{u}_i$ が求まる．ここで $N_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ は，係数行列 $K_{ik}(\boldsymbol{\xi})$ の余因子（cofactor），$D(\boldsymbol{\xi})$ は $K_{ik}(\boldsymbol{\xi})$ の行列式（determinant）である．(4.2)と(6.10)より K_{ik} と N_{ij} は対称行列であることがわかる．等方体については，(4.3)を使えば

$$\begin{aligned} N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) &= \mu\xi^2\{(\lambda+2\mu)\xi^2\delta_{ij} - (\lambda+\mu)\xi_i\xi_j\} \\ D(\boldsymbol{\xi}) &= \mu^2(\lambda+2\mu)\xi^6 \end{aligned} \quad \text{ただし}\ \xi^2 \equiv \xi_i\xi_i \tag{6.13}$$

と求まる．δ_{ij} は(4.3)で定義したクロネッカーのデルタである．

(6.12)を(6.8)に代入すると，変位 $u_i(\mathbf{x})$ が求まる．

$$u_i(\mathbf{x}) = -i\,C_{jlmn}\bar{\varepsilon}_{mn}^{*}(\boldsymbol{\xi})\xi_l N_{ij}(\boldsymbol{\xi})D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}) \tag{6.14}$$

この式を１回微分して(2.8)に代入することにより，全ひずみ $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ は

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = (1/2)\,C_{klmn}\bar{\varepsilon}_{mn}^{*}(\boldsymbol{\xi})\xi_l\{\xi_j N_{ik}(\boldsymbol{\xi}) + \xi_i N_{jk}(\boldsymbol{\xi})\}D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}) \tag{6.15}$$

と求まり，さらに(6.7)，(6.15)を(6.5)に代入して応力は

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}\{C_{pqmn}\bar{\varepsilon}_{mn}^{*}(\boldsymbol{\xi})\xi_q\xi_l N_{kp}(\boldsymbol{\xi})D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{\varepsilon}_{kl}^{*}(\boldsymbol{\xi})\}\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}) \tag{6.16}$$

と求まる．

脚注で述べたように，より一般的な $\varepsilon_{ij}^{*}(\mathbf{x})$ の分布の場合は，フーリエ級数やフーリエ積分の形で表現できる．$\boldsymbol{\xi}$ が飛び飛びの値をとる場合は前者，連続値として表される場合は後者を使う．たとえば，フーリエ積分の場合は以下のようになる．(6.7)の代わりに

---

[1] 周期的な形で表しておけば，フーリエ級数やフーリエ積分を使って，物体内で任意に変化する eigen ひずみも周期的な形の eigen ひずみの重ね合わせで表すことができるから便利である．

$$\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varepsilon}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{6.17}$$

のとき，このフーリエ逆変換は

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}) \exp(-i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{6.18}$$

となる．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi_3, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3 \tag{6.19}$$

である．したがって，次式を得る．

$$u_i(\mathbf{x}) = -i \int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_l N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} C_{klmn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_l \{\xi_j N_{ik}(\boldsymbol{\xi}) + \xi_i N_{jk}(\boldsymbol{\xi})\} D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \{\int_{-\infty}^{\infty} C_{pqmn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_q \xi_l N_{kp}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} - \varepsilon_{kl}^*(\mathbf{x})\} \tag{6.20}$$

または，フーリエ逆変換を使って次式を得る．

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= -i(2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn} \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \xi_l N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp\{i\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \\ &= (2\pi)^{-3} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn} \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp\{i\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3}(1/2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{klmn} \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \xi_l \{\xi_j N_{ik}(\boldsymbol{\xi}) + \xi_i N_{jk}(\boldsymbol{\xi})\} D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp\{i\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\mathbf{x}'$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} [(2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{pqmn} \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \xi_q \xi_l N_{kp}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp\{i\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\mathbf{x}' - \varepsilon_{kl}^*(\mathbf{x})\} \tag{6.21}$$

例題 6.1 （スピノーダル分解による弾性場） スピノーダル分解を起こす合金では，時効によって溶質原子が周期的な濃度変動を起こし，それに伴って，格子定数も周期的に変化する．今，簡単のために x_1 方向への１次元の濃度変動による eigen ひずみを次式で表す．

$$\varepsilon_{kl}^*(x_1) = \varepsilon^* \delta_{kl} \cos(2\pi x_1 / L) \tag{6.22}$$

ここで ε^* は格子定数の溶質原子濃度依存性がわかれば既知の量，L は濃度変動の波長で測定可能である．したがって，(6.22)式を既知として，これから変位場 $u_i(x_1)$ を求めてみよう．

まず，(6.22)を(6.7)と比較して

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^*(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon^* \delta_{kl}, \quad \xi_1 = 2\pi / L, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{6.23}$$

であることがわかる．ただし，(6.22)は(6.7)の実数部に対応することに注意しておく．(6.14)からたとえば $u_1(x_1)$ は次式のようになる．

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= -i\, C_{j1mn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_1 N_{1j}(\boldsymbol{\xi})\, D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\xi_1 x_1) \\ &= -i\, C_{11mn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_1 N_{11}(\boldsymbol{\xi})\, D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\xi_1 x_1) - i\, C_{21mn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_1 N_{12}(\boldsymbol{\xi})\, D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\xi_1 x_1) \\ &\quad -i\, C_{31mn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_1 N_{13}(\boldsymbol{\xi})\, D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\xi_1 x_1) \end{aligned} \tag{6.24}$$

ここで第２項と第３項はゼロである．何故なら(6.23)から $\bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi})$ は $m = n$ のときのみゼロではないが，その場合は C_{21mn} や C_{31mn} がゼロになってしまうからである．したがって

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= -i\, C_{11mn} \bar{\varepsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_1 N_{11}(\boldsymbol{\xi})\, D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\xi_1 x_1) \\ &= -i\, \varepsilon^* (C_{1111} + C_{1122} + C_{1133}) \xi_1 N_{11}(\boldsymbol{\xi})\, D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\xi_1 x_1) \end{aligned} \tag{6.25}$$

となるが，(4.3)から $C_{1111}+C_{1122}+C_{1133}=3\lambda+2\mu$，(6.13)から $N_{11}(\boldsymbol{\xi})=\mu^2\xi_1^4$，$D(\boldsymbol{\xi})=\mu^2(\lambda+2\mu)\xi_1^6$ を(6.25)に代入して実数部をとると，次式のように求まる．

$$u_1(x_1)=\varepsilon^*\left(\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{1}{\xi_1}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x_1\right)=\varepsilon^*\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{L}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x_1\right) \tag{6.26}$$

第２辺から第３辺への変換には，(4.8)のような弾性定数間の関係を使った．

次に $u_2(x_1)$ を求めてみる．

$$u_2(x_1)=-i\,C_{11mn}\bar{\varepsilon}^*_{mn}(\boldsymbol{\xi})\xi_1 N_{21}(\boldsymbol{\xi})\,D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\exp(i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})$$

であるが，(6.13)と $\delta_{21}=0$ かつ $\xi_2=0$ からこの問題では $N_{21}(\boldsymbol{\xi})=0$ である．問題の対称性から $u_2(x_1)=u_3(x_1)$ は明らかなので，結局次式を得る．

$$u_2(x_1)=u_3(x_1)=0 \tag{6.27}$$

6.3　弾性ひずみエネルギーの別表現

(4.14)式で学んだ弾性ひずみエネルギーの式をもう一度書いておく．

$$E_{\mathrm{el}}=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4.14}$$

この式は σ_{ij} が外部応力でも内部応力でも成り立つ．この式を eigen ひずみを使った別表現に書き換えてみよう．(6.3)を使うと(4.14)は次のようになる．

$$E_{\mathrm{el}}=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^*_{ij})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\left(\frac{u_{i,j}+u_{j,i}}{2}-\varepsilon^*_{ij}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}(u_{i,j}-\varepsilon^*_{ij})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{6.28}$$

第２辺から第３辺への書き換えには(2.6),(2.8)を使い，第３辺から第４辺への書き換えには，σ_{ij} が対称テンソルであることを使った．

ここで，部分積分を思い出そう．１次元で x の関数 $f(x)$, $g(x)$ に対しての部分積分は下のように表されることは周知の通りである．

$$\int_a^b f\cdot g_{,x}\,\mathrm{d}x=\Big[f\cdot g\Big]_a^b-\int_a^b f_{,x}\cdot g\,\mathrm{d}x \tag{6.29}$$

「$,x$」は x に関する微分を意味する．(6.29)を３次元に拡張した次式をガウスの定理（Gauss theorem）という．

$$\int_V f\cdot g_{,j}\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{|V|} f\cdot g\,n_j\,\mathrm{d}\mathbf{S}-\int_V f_{,j}\cdot g\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{6.30}$$

ただし「$,j$」は x_j に関する偏微分，$|V|$ は体積 V の物体の表面，n_j は $|V|$ に立てた単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の x_j 成分であり（**図 6.2**），右辺第１項の積分は $\mathrm{d}\mathbf{S}$ を面積要素とする表面２重積分である．

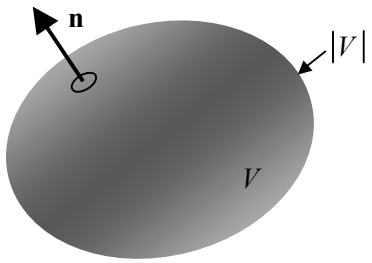

図 6.2　物体 V，その表面 $|V|$ および表面に立てた単位法線ベクトル $\mathbf{n}$.

(6.30)を使って，(6.28)をさらに書き換えてみる．

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{el}}&=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}u_{i,j}\,\mathrm{d}\mathbf{x}-\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\frac{1}{2}\int_{|V|}\sigma_{ij}u_i n_j\,\mathrm{d}\mathbf{S}-\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij,j}u_i\,\mathrm{d}\mathbf{x}-\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned}$$

最後の辺の第１項に含まれる $\sigma_{ij}n_j$ は，(3.1)の境界条件より $\sigma_{ij}n_j=X_i$（もし $X_i=0$ なら（3.2)よりゼロ）になる．ここで，X_i は物体表面に作用する面力である．また，第２項に含まれる $\sigma_{ij,j}$ は，(3.3)の静的釣り合い条件よりゼロである．したがって，

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\int_{|V|} X_i u_i \,\mathrm{d}\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{6.31}$$

を得る．そして，もし $X_i = 0$ の内部応力問題ならば

$$E_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{6.32}$$

となる．(4.14)と(6.32)を比べると，式の形としては，単に弾性ひずみが eigen ひずみに替わり，前にマイナスが付いただけでであまり進歩がないように思えるが，実は(6.32)は，今までどれだけ利用されてきたかわからないほど有用な式なのである．その理由は，すぐ明らかになる．

第６章練習問題

問題 6.1 (6.26)，(6.27)の結果を使い，(6.22) の eigen ひずみ分布を持つ材料での全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x})$ を(2.6)，(2.8)から，また内部応力 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{x})$ を(6.5)から求めよ．

★問題 6.2 （立方体介在物） 無限に大きな物体中に一辺が $2a$ の立方体が１個あり，その立方体の中のみに均一な eigen ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^* = \varepsilon^* \boldsymbol{\delta}_{kl}$ が存在するとき，立方体の内外の内部応力場を求めよ．

（ヒント）数学の公式集によると，**図 6.3** のような周期 $2L$ の階段関数はフーリエ級数の形で下の(6.33)式のように表すことができる．ひずみや応力もフーリエ級数の形で求まるので，（場所によって変わる）具体的な数値を求めるには，コンピューター計算によらなくてはならない．さらに，ここでは１個の立方体介在物を考えるのだから，$L >> a$ とする必要もある．また，n に関する無限級数の和をどこで切るかの問題もあるが，このあたりは，計算時間と計算精度との関係を見ながらの試行錯誤しかない．

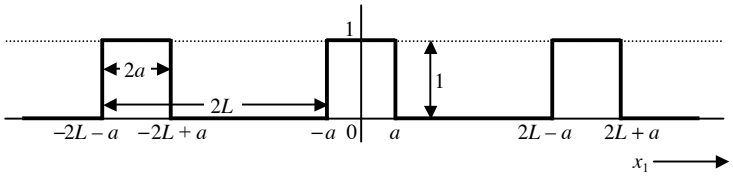

図 6.3 階段関数の１例

$$\frac{a}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right), \quad (L > a) \tag{6.33}$$