第３章　面力と応力

3.1　面力ベクトル

物体の表面に力が作用しているとき，単位面積あたりの力を面力（surface force または traction）という．面力はベクトルであり，その単位は圧力と同じ Pa である．

図 3.1 のように 2 次元座標系 x_1 - x_2 を考える．物体表面のハッチを施した面積 ds，外側に向けた単位法線ベクトル $\mathbf{n} = [n_1, n_2]$ の微小斜面に単位面積あたり面力 $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ が作用しているとし，この面力を座標軸に垂直な微小三角柱の側面（面積をそれぞれ ds_1, ds_2 とする）に分解して考える．このとき，たとえば，x_j 軸に垂直な面に作用する x_i 方向の単位面積あたりの力を σ_{ij} のように表すことにし，これを応力（stress）と定義する．応力は添え字を２つ持つ２階のテンソルである．

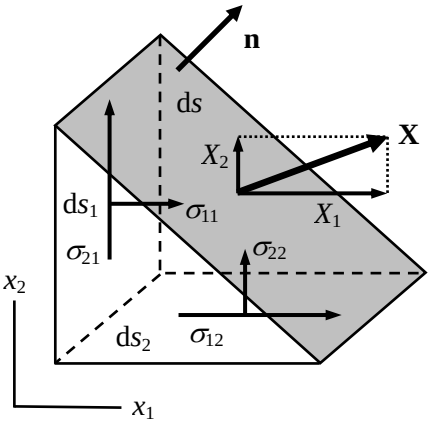

図3.1　面力 $\mathbf{X}$ と応力 σ_{ij} の関係．

ここで x_1 方向の力を考えよう．まず，斜面 ds には X_1ds が作用している．次に側面 ds_1 と ds_2 には，それぞれ σ_{11}ds_1 と σ_{12}ds_2 が x_1 方向に作用しており，これらの和が X_1ds に等しいはずである．作用面の面積の間には $n_j =$ ds_j /ds（ j は 1 または 2）の関係があることに注意すると

$$\sigma_{11}\mathrm{d}s_1 + \sigma_{12}\mathrm{d}s_2 = \sigma_{11}n_1\mathrm{d}s + \sigma_{12}n_2\mathrm{d}s = X_1\mathrm{d}s$$

を得る．これから

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = X_1$$

となる．同様に x_2 方向の力を考えれば

$$\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = X_2$$

を得る．これらは次のようにまとめて表すことができる．

$$\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}n_j \equiv \sigma_{ij}n_j = X_i \qquad (3.1)$$

この第２辺は，総和記号Σを省略した形で第１辺を表したものである．第２辺を見ると，下付き添え字の j が２回現れている．このように１つの項の中に２回現れる添え字については，それに１から２（３次元では１から３）までを代入して和をとることを暗黙のうちに約束しておけば，総和記号を省略できて式が簡潔になる．以後，この簡便表記の約束を用いて式を表す．すなわち，この講義ノートでの式の簡便表記は，(2.6)の偏微分に関するものと(3.1)の総和記号に関するものの２種類である．

なお，(3.1)で面力がゼロの自由表面では

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \qquad (3.2)$$

となる．(3.1)，(3.2)を**応力の境界条件の式**という．

応力については，もう１つ満たすべき式がある．図 3.2 に示すように，C を中心とする有限体積 $\Delta x_1 \Delta x_2$（奥行方向は単位長さ）の物体の各面に働く応力は一般には異なる．図で x_1 方向の力の釣り合いを考えれば次式を得る．

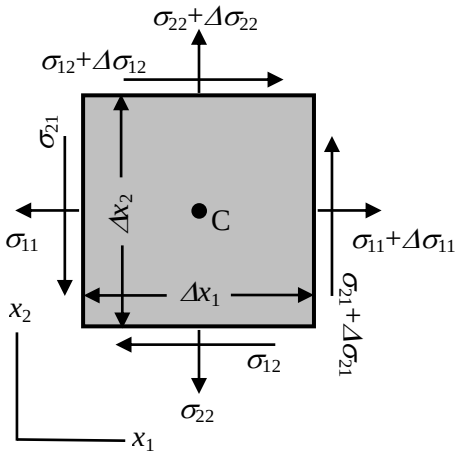

図3.2　$\Delta x_1\ \Delta x_2$ の体積（面積）部分に作用する面力と応力．

$$(\sigma_{11}+\Delta\sigma_{11})\Delta x_2+(\sigma_{12}+\Delta\sigma_{12})\Delta x_1=\sigma_{11}\Delta x_2+\sigma_{12}\Delta x_1$$

この式でΔx_1，Δx_2をともにゼロの極限まで小さくすると，以下の偏微分の形の式を得る．

$$(\partial\sigma_{11}/\partial x_1)+(\partial\sigma_{12}/\partial x_2)=0$$

同様にx_2方向の釣り合いを考えれば

$$(\partial\sigma_{21}/\partial x_1)+(\partial\sigma_{22}/\partial x_2)=0$$

となるので，総和記号および偏微分の簡便表記の双方を同時に使えば，上式は次のようにまとめて表すことができる．

$$\sigma_{ij,j}=0 \tag{3.3}$$

これを**静的釣り合いの条件式**という．

物体の正味の変形に興味のある我々は剛体回転には興味がない．そこで，物体は回転しないとし，図 3.2 で C 点まわりの力のモーメントがゼロと考えるこのとき，時計回りと反時計回りのモーメントの釣り合いから

$$\{(\sigma_{12}+\Delta\sigma_{12})+\sigma_{12}\}\Delta x_1(\Delta x_2/2)=\{(\sigma_{21}+\Delta\sigma_{21})+\sigma_{21}\}\Delta x_2(\Delta x_1/2)$$

となり，Δx_1，Δx_2をゼロの極限にとれば $\sigma_{12}=\sigma_{21}$を得る．すなわち，応力テンソルもひずみテンソルと同様に対称テンソルであり，独立な成分は３次元で６個，２次元で３個になる．

第４章　フックの法則と弾性ひずみエネルギー

4.1　弾性定数

ばね定数kのコイルばねをxだけ伸ばすのに必要な力 f が$f=kx$ と書けるとしたら，力は伸びに比例する．これをフックの法則(Hooke’s law)というが，同様な関係が応力と弾性ひずみに対しても成り立つとしたときの手法を線形弾性論（linear elasticity）といい，微小変形理論が直接に適用できる．また，応力と弾性ひずみの比例関係は，ひずみと同様に応力の重ね合わせも可能にするので，非常に有用なものでもある．(2.8)で定義したひずみには，弾性ひずみ以外のものもあることを後に学ぶが，この講義では，弾性ひずみについては，ギリシャ文字εではなくローマ字のeを使ってe_{ij}と表すことにする．

応力σ_{ij}と弾性ひずみe_{ij}の間のフックの法則の一般形は以下のようになる．

$$\sigma_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}C_{ijkl}e_{kl}=C_{ijkl}e_{kl} \tag{4.1}$$

ここの第３辺でも総和記号の簡便表記を用いてあり，第２辺と同じ意味である．また，C_{ijkl}は弾性定数（elastic constant）であり，

$$C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl}=C_{ijlk} \tag{4.2}$$

が成り立つことが知られている．

弾性定数は４つの添え字を持つので，一見して 3 次元では 3^4 = 81 個あるように思えるが，(4.2)の関係によって，実際には独立な弾性定数の最大数は 21 個になる．対称性を持つ結晶ではさらに減って，たとえば最密六方結晶（hcp）では５個，立方晶結晶では３個である．この講義ノートで扱う等方体（isotropic body）の場合が最も対称性がよく，独立な弾性定数は２個のみである．それらをλとμ（合

わせてラーメ定数（Lame's constants）とよばれる）と表せば次式が成り立つ．

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} \tag{4.3}$$

ここでδ_{ij}はクロネッカーのデルタとよばれ，

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{4.4}$$

と定義される．これから以下の関係がわかる．

$$\left.\begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = \lambda + 2\mu \\ C_{1122} = C_{2233} = C_{3311} = \lambda \\ C_{1212} = C_{2323} = C_{3131} = \mu \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

i, j, k, l の中に同じ数字が奇数回含まれる場合は C_{ijkl} はゼロとなる[1]．

ラーメ定数のうちのμは剛性率（shear modulus または rigidity）ともよばれる．ラーメ定数以外にもヤング率（Young's modulus, E），ポアソン比（Poisson's ratio, ν），体積弾性率（bulk modulus, K）などが等方体のフックの法則の表現によく用いられる．外部応力としてσ_{33}のみの一軸応力を付加したとき，ヤング率とポアソン比は

$$E \equiv \sigma_{33} / e_{33} \tag{4.6}$$

$$\nu \equiv -e_{11} / e_{33} \; (\equiv -e_{22} / e_{33}) \tag{4.7}$$

で定義される．ポアソン比のみは無次元量で，多くの物体で 0.3 程度の値を持つ．前述のように，等方体の独立な弾性定数は２個しかないから，これらの諸量の間には，たとえば次式のような関係がある．

$$E = 2\mu(1+\nu), \quad K = (3\lambda + 2\mu)/3, \quad \lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu) \tag{4.8}$$

4.2　等方体のフックの法則

等方体のフックの法則の表現にはいろいろあるが，下の(4.9)は応力を弾性ひずみの関数で，(4.10)は弾性ひずみを応力の関数で表した例である．

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)e_{11} + \lambda(e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)e_{22} + \lambda(e_{33} + e_{11}) \\ \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)e_{33} + \lambda(e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{12} &= 2\mu e_{12}, \quad \sigma_{23} = 2\mu e_{23}, \quad \sigma_{31} = 2\mu e_{31} \end{aligned} \tag{4.9}$$

あるいは

$$\begin{aligned} e_{11} &= \{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\}/E \\ e_{22} &= \{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})\}/E \\ e_{33} &= \{\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\}/E \\ e_{12} &= \sigma_{12}/(2\mu), \quad e_{23} = \sigma_{23}/(2\mu), \quad e_{31} = \sigma_{31}/(2\mu) \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.3　弾性ひずみエネルギー

4.1 で考えたコイルばねに蓄えられる弾性エネルギー（弾性ひずみエネルギー，elastic (strain) energy）E_S は，

---

[1]　たとえば C_{1111} を C_{11}，C_{1122} を C_{12} のように，２つの添え字を使って弾性定数を表すこともあるが，この表現では，弾性定数を４階のテンソルとして扱うことはできない．

$$E_{\mathrm{S}} = (1/2)kx^2 = (1/2)\,f\,x \tag{4.11}$$

と表される．内部応力状態にある物体の弾性ひずみエネルギーも，ばねと同様にひずみの２次形式で表される．ただし物体の場合の弾性ひずみエネルギーは物体の体積に比例する量なので，単位体積あたりの弾性ひずみエネルギー（または「弾性（ひずみ）エネルギー密度」，elastic（strain）energy density） E_0 で表すと次式のようになる．

$$E_0\left(=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}C_{ijkl}\,e_{ij}e_{kl}\right)=\frac{1}{2}C_{ijkl}\,e_{ij}e_{kl}=\frac{1}{2}\sigma_{kl}e_{kl} \tag{4.12}$$

この式の第３辺は $(1/2)C_{klij}\,e_{ij}e_{kl}$ と書いても同じことなので，(4.2)のように $C_{ijkl}=C_{klij}$ が成り立つことがわかる．

等方体のフックの法則を使って，(4.12)を陽に表すと次式のようになる．

$$E_0=(\lambda/2)\left(e_{11}+e_{22}+e_{33}\right)^2+\mu\left(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2\right)+(\mu/2)\left(e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2\right) \tag{4.13}$$

一般に応力やひずみは物体中の場所によって変わるので，体積 V の物体に蓄えられる弾性ひずみエネルギー E_{el} は，(4.12)を物体全体にわたって体積積分することにより得られる．すなわち，

$$E_{\mathrm{el}}=\iiint_V E_0\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\equiv\frac{1}{2}\int_V\sigma_{ij}\,e_{ij}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4.14}$$

である．ここで第３辺は体積三重積分の簡略表現で，今後もこれを使う．

第４章練習問題

問題 4.1　(4.1)，(4.3)を用いて(4.9)を導出せよ．必要ならば，ひずみ成分は対称であることや(4.2)を使え．

問題 4.2　(4.8)の各式を導出せよ．

問題 4.3　立方晶結晶の独立な弾性定数は３個あり，(4.3)に対応する表現は下記のようになる．

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\mu\delta_{il}\delta_{jk}+\mu'\delta_{ijkl} \tag{4.15}$$

ここで δ_{ijkl} は $i=j=k=l$ のときのみ 1，その他の場合はゼロである．立方晶の独立な弾性定数を C_{11}, C_{12}, C_{44} と表すことがあるが，(4.15)を用いてこれらを λ, μ, μ' を使って表せ．

★第５章　ベクトルとテンソルの座標変換

しばしばひずみや応力を異なった座標系で表す必要が生じる．**図 5.1** を見てみよう．$x_1 - x_2$ ２次元座標系を反時計回りに角度α 回転させた新 $x_1^{\mathrm{n}} - x_2^{\mathrm{n}}$ 座標系を考える．そして，任意の位置ベクトル $\mathbf{x}$ の旧座標系での成分を $[u_1,\ u_2]$，新座標系での成分を$[v_1, v_2]_{\mathrm{n}}$ とする．このように，新座標系で表した成分には括弧の右下に添え字 n を付して旧座標系と区別する．

図からわかるように，旧座標系での点[1, 0]，[0, 1] は新座標系ではそれぞれ$[\cos\alpha,\ -\sin\alpha]_{\mathrm{n}}$，$[\sin\alpha,\ \cos\alpha]_{\mathrm{n}}$ と表せる．このことをまとめたのが，**表 5.1** である．これは便利な表で，横の行を見ると，旧座標系→新座標系の成分変換がわかり，縦の列を見ると，新座標系→旧座標系の成分変換がわかる．たとえば，新座標系で$[1,\ 0]_{\mathrm{n}}$，$[0,\ 1]_{\mathrm{n}}$は旧座標系ではそれぞれ$[\cos\alpha,\ \sin\alpha]$，$[-\sin\alpha,\ \cos\alpha]$と表せることを図 5.1 で確認してほしい．

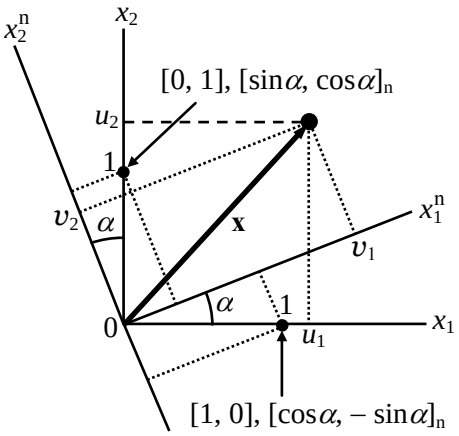

図5.1　旧座標系と新座標系で見たベクトル $\mathbf{x}$ の成分.

表 5.1 は，旧座標系と新座標系の間の座標変換行列 $\mathbf{T}$ を与える．

表5.1　旧座標系と新座標系の間の方向余弦.

旧＼新	x_1^{n} // $[1, 0]_{\mathrm{n}}$	x_2^{n} // $[0, 1]_{\mathrm{n}}$
x_1 // [1, 0]	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
x_2 // [0, 1]	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

また，旧座標系で見た任意の位置ベクトル $\mathbf{x}$ の成分 $[u_1, u_2]$ を新座標系で見た成分 $[v_1, v_2]_{\mathrm{n}}$ で表すときは，$\mathbf{T}$ の転置行列（行と列を入れ換えた行列で，座標変換行列の場合，これは逆行列 $\mathbf{T}^{-1}$ に等しい[2]）$\mathbf{T}^{\mathrm{tr}}$ を用いて

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{\mathrm{n}} = \mathbf{T}^{\mathrm{tr}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

のようになる．

それでは，ひずみや応力などの２階のテンソルの座標変換はどうすればよいのであろうか？　それは，上で求めた座標変換行列 $\mathbf{T}$ と，その転置行列 $\mathbf{T}^{\mathrm{tr}}$ をひずみや応力テンソルに挟むことによって得られる．すなわち，新座標系でのひずみ成分を上付き添え字 n を用いて表すと次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{\mathrm{n}} & \varepsilon_{12}^{\mathrm{n}} \\ \varepsilon_{21}^{\mathrm{n}} & \varepsilon_{22}^{\mathrm{n}} \end{pmatrix}_{\mathrm{n}} = \mathbf{T}^{\mathrm{tr}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

数学では，このような座標変換が成り立つ量のことをテンソルと定義する．ひずみや応力は対称行列であることに注意して，上式の新しいひずみ成分を陽に書き下すと次式を得る．

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\mathrm{n}} &= \varepsilon_{11}\cos^2\alpha + 2\varepsilon_{12}\cos\alpha\,\sin\alpha + \varepsilon_{22}\sin^2\alpha \\ \varepsilon_{22}^{\mathrm{n}} &= \varepsilon_{11}\sin^2\alpha - 2\varepsilon_{12}\cos\alpha\,\sin\alpha + \varepsilon_{22}\cos^2\alpha \\ \varepsilon_{12}^{\mathrm{n}} &= \varepsilon_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})\cos\alpha\,\sin\alpha \end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで重要なことは，対称行列は適当な座標変換によって，必ず対角化できるということである．

---

[2] 座標変換行列は数学的には直交行列（orthogonal matrix）とよばれ，その行列式の値は１である．

対角化されたひずみや応力の成分を主値（principal value，または固有値 eigenvalue）という．例として，せん断応力

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

を対角化して応力の主値を求めてみよう．(5.4)のεをσに読み替えて，(5.5)の各成分を(5.4)に代入すれば

$$\sigma_{11}^{\mathrm{n}} = 2\sigma_{12}\cos\alpha\,\sin\alpha,\quad \sigma_{22}^{\mathrm{n}} = -2\sigma_{12}\cos\alpha\,\sin\alpha,\quad \sigma_{12}^{\mathrm{n}} = \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \tag{5.6}$$

を得るが，これが対角行列になるためには$\sigma_{12}^{\mathrm{n}} = 0$，すなわち$\alpha = \pm 45^{\mathrm{o}}$でなければならない．したがって，

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \sigma_{ij}^{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} -\tau & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

が得られ，主値はτおよび $-\tau$と求まる．なお，ある行列 $\mathbf{A}$ の主値を求めるだけならば，以下のような永年方程式(secular equation)を解いても得られる．

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{5.8}$$

ここでλは求める解であり，$\mathbf{I}$ は単位行列，det は行列式（determinant）を意味する．$\mathbf{A}$ として(5.5)を用いると

$$\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \lambda & \tau \\ \tau & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \det(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}) = \lambda^2 - \tau^2 = 0 \tag{5.9}$$

から$\lambda = \pm\tau$が求まる．

線形代数学によると，行列の座標変換を行っても変わらない量（スカラー不変量）として，行列式や対角和(trace)がある．ちなみに，ひずみ行列の対角和は変形に伴う体積変化率を表している．

★第５章練習問題

問題 5.1　下記の２次元 x_1 - x_2 座標系で表される一軸応力を，座標系を反時計回りに 45°回転させた新しい $x_1^{\mathrm{n}} - x_2^{\mathrm{n}}$ 座標系上で記述せよ．

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

問題 5.2　ひずみ行列の対角和はスカラー不変量であるが，これが変形に伴う体積変化率を表していることを説明せよ．

問題 5.3　３行３列の行列 $\mathbf{A}$ の各成分が A_{ij}（i, j は１から３まで）のとき以下の問に答えよ．

(1) この行列の永年方程式$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$を$\lambda$の３次式として具体的に書け．

(2) 上の３次式を使って，行列 $\mathbf{A}$ の行列式と対角和が座標系の取り方によらないことを説明せよ．