固 体 の 変 形 と 力 学（前半）

材料物理科学専攻　加 藤 雅 治
J2 棟 1407 号室，内線 5633
kato@materia.titech.ac.jp

はじめに

本講義は，私が担当の弾性論とマイクロメカニックスの基礎の部分（前半）と，尾中教授が担当の格子欠陥・転位論の部分（後半）からなり，材料の力学的性質を理解するために必要な知識を身に付けることを目的としている．前半，後半を通じて，講義内容は，以下の教科書・参考書の内容と重複する箇所が多い．もちろん，購入を強制するわけではない．

・ 加藤雅治，熊井真次，尾中 晋：材料強度学，朝倉書店，1999.
・ 加藤雅治：入門転位論，裳華房，1999.

前半（中間試験）と後半（期末試験）のそれぞれに試験を行うとともに，出席点も加えて成績報告する．なお，講義に使用するプリントは，「東工大 OCW」にある講義資料を，各自ダウンロードしていただきたい．前半のプリント中に★印が付けられている章，節，問題などは，決して枝葉末節という意味ではないが，限られた講義時間の中でカバーすることが難しい箇所である．必要ならば，参照願いたい．

第１章　この講義で何を学ぶか

まずは**図 1.1** を見てみよう．(a)は純 Al と超ジュラルミンの応力—ひずみ曲線の比較である．超ジュラルミンには,Al の他に mass%で約 4.5%の Cu と 1.5%の Mg が含まれている.Al 単体では強度が低く，構造材料としては使い物にならないが，このように Cu や Mg を加えて合金化することによって，強度（応力レベル）がはるかに増大する．実際，ジュラルミン系の Al 合金は，航空機の胴体や翼に広く用いられている．(b)は圧延された低炭素鋼に種々の焼鈍（annealing,温度を上げて一定時間保持する．熱処理の一種）をしたときの応力—ひずみ曲線である．同じ材料でも，熱処理によって強度や伸びが大きく異なることがわかる．このように金属や合金は，一見しただけでは同じように見えても，その

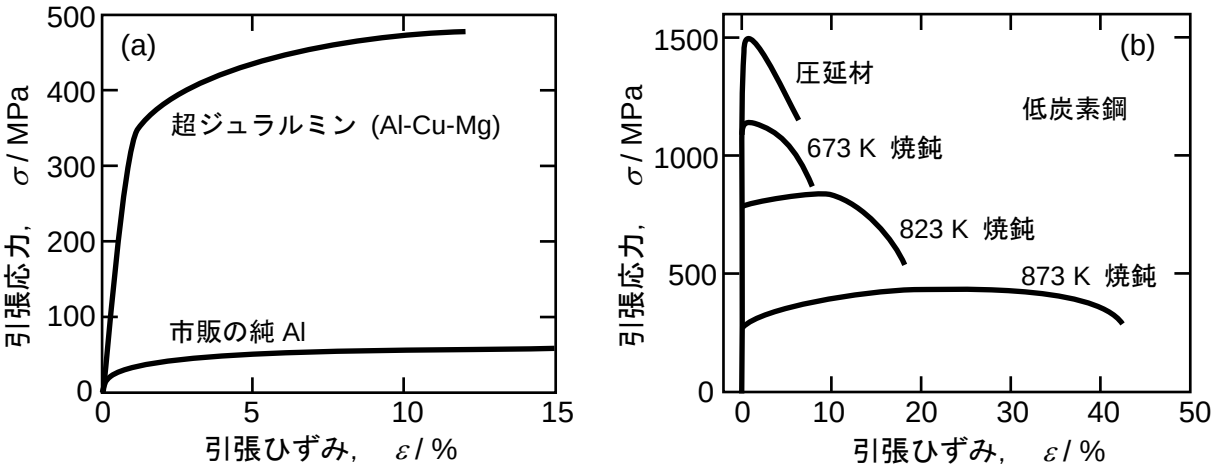

図 1.1　種々の材料の応力—ひずみ曲線．(a) 純 Al と超ジュラルミン，(b) 低炭素鋼の焼鈍による力学的性質の変化．

力学的性質（mechanical properties,　機械的性質ともいう．強度，伸び，延性，靭性など）は大きく異なることが多い．そして，その理由は，これらの材料の内部組織（microstructure，微細組織ともいう）の相違による．

機械屋さんや土木・建築屋さんのように構造用材料を使用する立場の人にとっては，与えられた材料の力学特性がわかれば十分かもしれない．その場合は，材料の内部組織にはあまり関心がないかもしれない．しかし，我々のような材料屋としては，力学特性の発現機構を深く追究し，できるだけ定量的な理論体系にしたがって，力学特性がさらに優れた新しい材料の開発にまで結びつけることを目標としなければならない．そのためには，力学特性の観点から「材料の組織」を定量的に特徴付けるサイエンスを学ぶ必要がある．

金属でもセラミックスでも固体は結晶（crystal）からなっている場合が多いが，実用金属材料のほぼ全てのものは多結晶である．すなわち，**図 1.2** のように方位が異なる多くの単結晶（A, B, C）からなり，各々の単結晶を結晶粒（grain）とよぶ．隣接する結晶粒の境界では原子配列が乱れた箇所が存在するが，これを結晶粒界（grain boundary）という．結晶粒の大きさは数μm から数百μm のことが多いが，最近ではその優れた力学特性のために，結晶粒が数十 nm（ナノ結晶，nanocrystal）から数百 nm（超微細粒材料，ultrafine-grained material）という非常に小さな結晶粒を持つ材料も注目されている．

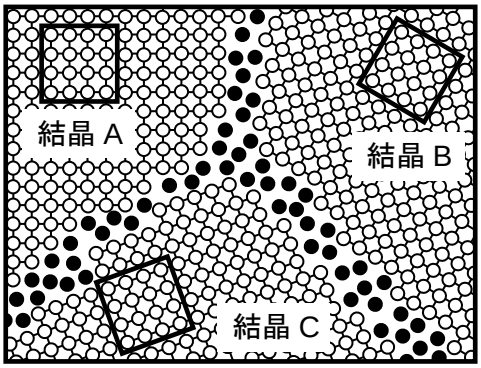

図 1.2　多結晶における結晶粒（A, B, C）と結晶粒界（黒丸の原子の箇所）

図 1.2 の各結晶粒 A, B, C のも完全結晶ではない．その中には原子配列の乱れた箇所（格子欠陥，lattice defect）や異種原子あるいはそれらの集合体など，さまざまな“組織”が存在する．**図 1.3** はその例である．(a)は母相金属中の析出物の例で，このような微細な析出物が存在すると，存在しない場合に比べてこの材料の強度は上昇する．(b)は疲労（繰り返し何度も塑性変形させること）させた Cu 単結晶で見られる転位（dislocation，本講義の後半で詳細に学ぶ格子欠陥の一種）が集団となって形成される組織の一例である．はしごのような組織なので，しばしば ladder 組織という．このように材料中の内部組織がその材料の力学特性に及ぼす影響にはいろいろな種類のものが存在するが，まずは，力学特性の評価法を知っておく必要がある．

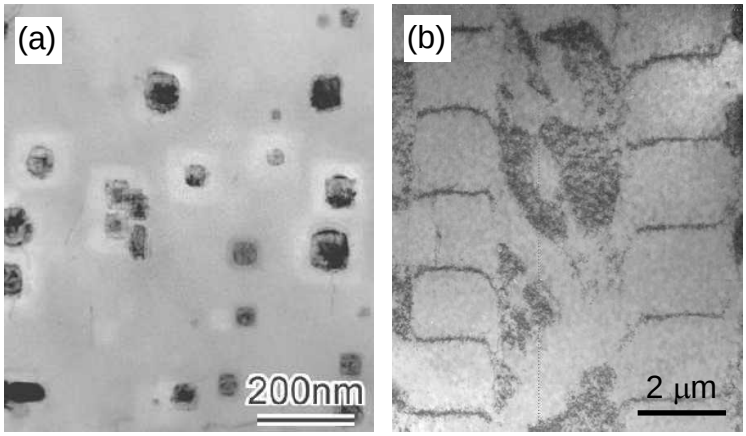

図 1.3　(a) Cu 中の微細な Co-Fe 析出物，(b) Cu 単結晶を疲労試験したときに生じる ladder 転位組織

次章以下では，線形弾性論（linear elasticity）とマイクロメカニックス（micromechanics）の基礎を学ぶ．ここで十分に定量的な評価法に関する力をつけて，後半の講義へとバトンタッチすることが目的である．

第２章　変位，ひずみ，回転

金属材料，無機材料の多くは結晶固体であるが，この講義の前半では，当分の間，結晶を忘れて，物体を連続体（どこまで小さくしても連続しており，原子１個１個などの構成単位に分割できない物体）の固体と考えることにする．

2.1　変位と変形勾配

図2.1 で x_1 - x_2 ２次元座標系上の２つの長方形が変形前後の物体の形を示しているとする．変形前に位置ベクトル $\mathbf{x}$ = [x_1, x_2] で表される任意の点が，変形後には位置ベクトル $\mathbf{y}$ = [y_1, y_2] で表される点へと変化したとし，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は変形行列 $\mathbf{A}$ を用いて

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (2.1)$$

で関係づけられるとしよう．以下では $\mathbf{x}$ や $\mathbf{y}$ のような方向を表すベクトルは列ベクトルとして定義する．また，行列，テンソル，ベクトルそのものを表すときは，太字立体を，それぞれの成分を表すときは斜体を用いることにする．

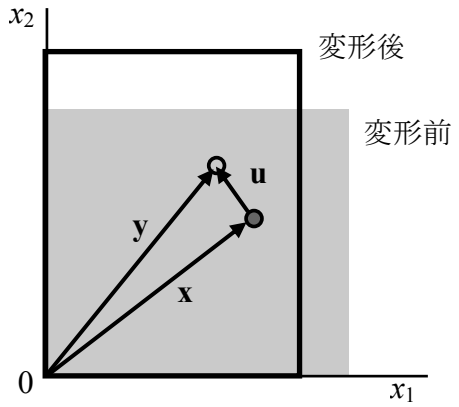

図2.1　変形 $\mathbf{A}$ による位置ベクトル $\mathbf{x}$ の $\mathbf{y}$ への変換．ベクトル $\mathbf{u}$ は変位とよばれる．

行列 $\mathbf{A}$ は２次元では２行２列，３次元では３行３列の行列で表せ，(2.1)式の２次元での成分表示は

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

となる．次に，変位（displacement）$\mathbf{u} = [u_1, u_2]$ を次式で定義する．

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\,\mathbf{x} \qquad (2.3)$$

$\mathbf{I}$ は単位行列である．

$$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

(2.2)から(2.4)より $\mathbf{u}$ の成分に対して

$$u_1 = (A_{11} - 1)x_1 + A_{12}x_2, \quad u_2 = A_{21}x_1 + (A_{22} - 1)x_2 \qquad (2.5)$$

を得る．このように $\mathbf{u}$ は元の位置 $\mathbf{x}$ の関数となる．そこで，$\mathbf{u}$ の各成分の x_i（２次元では i は１または２）に対する偏微分を変形勾配（distortion）β_{ij} と定義する．

$$\beta_{11} \equiv u_{1,1}, \quad \beta_{12} \equiv u_{1,2}, \quad \beta_{21} \equiv u_{2,1}, \quad \beta_{22} \equiv u_{2,2} \qquad (2.6)$$

ここで，$u_{1,1} \equiv \partial u_1 / \partial x_1$，$u_{1,2} \equiv \partial u_1 / \partial x_2$ のように，$u_{i,j}$ は偏微分 $\partial u_i / \partial x_j$ の簡便表記であり，以下でも使うことにする．もし β_{ij} の全ての成分がゼロならば，それは，物体中のいたるところで $\mathbf{u}$ が同一であることを意味する．これは単に物体を平行移動しただけであり，物体の（形を変える意味での）変形はない．

変形勾配には２次元では４個，３次元では９個の成分があり，(2.5)の例では，

$$\beta_{11} = A_{11} - 1, \quad \beta_{12} = A_{12}, \quad \beta_{21} = A_{21}, \quad \beta_{22} = A_{22} - 1 \qquad (2.7a)$$

となる．変形勾配行列を $\boldsymbol{\beta}$ と表せば，(2.7a)は

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\beta} \tag{2.7b}$$

と書くこともできる．

2.2　ひずみと回転

変形勾配行列の対称成分をひずみ（strain）ε_{ij}，反対称成分を回転（rotation）ω_{ij} といい，下のように定義される．

$$\varepsilon_{ij} \equiv (\beta_{ij} + \beta_{ji})/2 \tag{2.8}$$

$$\omega_{ij} \equiv (\beta_{ij} - \beta_{ji})/2 \tag{2.9}$$

β_{ij}，ε_{ij}，ω_{ij} はすべて無次元量であり，添字を２つ持つ２階のテンソル量である．(2.8)で i と j が等しい場合を垂直ひずみ（normal strain），異なる場合をせん断ひずみ(shear strain)とよぶ．少し紛らわしいが，せん断ひずみ（$i \neq j$ の場合）に対しては，工学せん断ひずみ(engineering shear strain)として，

$$\gamma_{ij} \equiv \beta_{ij} + \beta_{ji} \tag{2.10}$$

を用いることもある．しかし，これはテンソル量ではない．

図 2.2(a)を見てみよう．変形前に単位長さ 1 の辺を持つ正方形（ハッチした部分）が，変形後に太線のような長方形（短辺 1，長辺 $1 + a$）へと変化した図である．この場合，たとえば変形前に $\mathbf{x} = [1, 0], [0, 1], [1, 1]$ の位置にあった 3 点は，変形後にはそれぞれ $\mathbf{y} = [1+a, 0], [0, 1], [1+a, 1]$ の位置に変化する．これから

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

が得られ，変形前の任意の位置 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ は，変形後には $\mathbf{y} = [(1+a)\, x_1, x_2]$ となることがわかる．したがって，(2.3)または(2.5)から

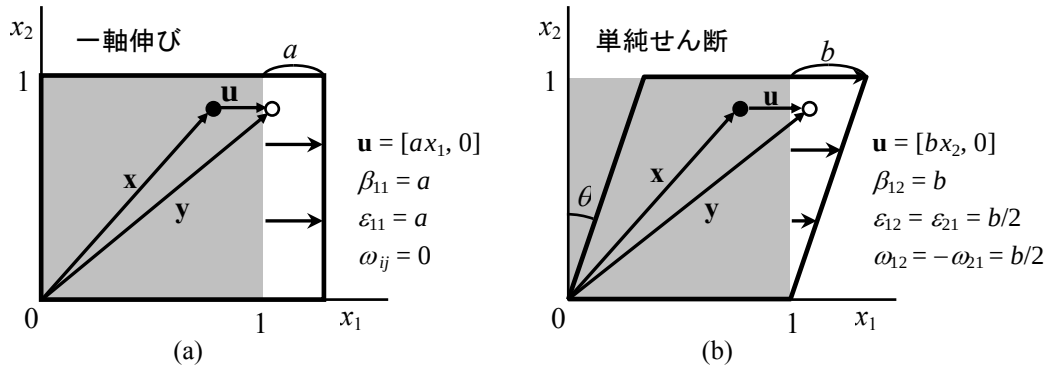

図2.2　単位の２次元正方形が受ける (a)一軸伸びと (b)単純せん断による変位，変形勾配，ひずみ，回転．それぞれにゼロでない成分のみが示されている．

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{x} = [ax_1,\ 0] \tag{2.12}$$

を得る．$\mathbf{u}$ が求まれば，(2.6)から(2.9)より，変形勾配，ひずみ，回転の各成分が求まる．これは一軸伸び（uniaxial extension）の状況を表し，ゼロでないひずみは垂直成分 ε_{11} のみであり，回転成

分はすべてゼロである．

同様に考えると，図 2.2(b)の単純せん断（simple shear）の場合の各量も理解できる．この図に示したように，単純せん断では回転成分もゼロではないことに注意しよう．

一方，せん断ひずみのみで回転がゼロとなるせん断変形は純粋せん断（pure shear）とよばれ，**図 2.3**(a)のように表せる．ここで示した長さ φ は，$|\varphi| << 1$ のとき，ラジアンで表した角度に相当していることに気づいて欲しい．なぜなら $\tan\varphi \fallingdotseq \sin\varphi \fallingdotseq \varphi$ （$|\varphi| << 1$）だからである．

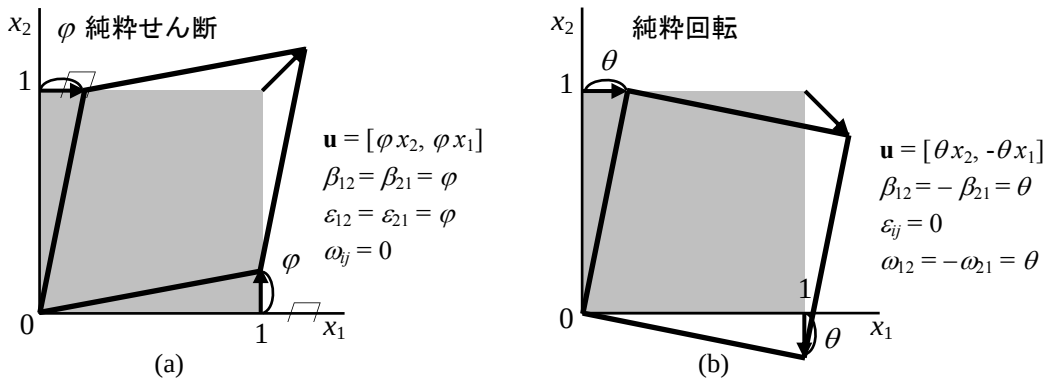

図2.3　単位の２次元正方形が受ける(a) 純粋せん断と(b) 純粋回転による変位，変形勾配，ひずみ，回転.

図 2.3（b）は，ひずみがゼロで，回転のみ起こる場合である．上に述べた理由で，θ は長さでもあるが，回転角でもある．厳密にいえば，回転後の正方形は回転前の単位の正方形よりわずかに大きい．しかし，$|\theta|$ が１に比べて小さく，ひずみはゼロと見るのである．これは微小変形理論の基本となる考え方である．

★2.3　大変形理論と微小変形理論の関係

若干曖昧ないい方ではあるが，変形量が小さいと考えた取り扱いを微小変形理論（infinitesimal deformation theory）とよぶ．(2.6)から(2.10)までで定義した変形勾配，ひずみ，回転は，微小変形理論に基づく量である．微小変形理論では，たとえば図 2.3(b)の回転行列 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

となる．一方，微小変形理論と対をなす大変形理論（large deformation theory）では，(2.13)に相当する回転行列 $\mathbf{R}$ が

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

となることを我々はよく知っている．(2.13)，(2.14)より，$|\theta| << 1$ のとき，$\cos\theta$, $\sin\theta$ をテーラー展開して，θの２次以上の項を無視すると

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega} \tag{2.15}$$

が近似的に成り立つことがわかるであろう．これは(2.7b)で見た変形勾配行列と変形行列の関係と同形である．

大変形と微小変形の関係をさらに理解するために，今，位置ベクトル $\mathbf{x}$ が変形（または回転）$\mathbf{A}$ (= $\mathbf{I}$ + $\boldsymbol{\beta}_A$) によって位置ベクトル $\mathbf{y}$ に変換され，さらに $\mathbf{y}$ が変形（または回転）$\mathbf{B}$ (= $\mathbf{I}$ + $\boldsymbol{\beta}_B$) によって $\mathbf{z}$ に変換されたとする．このとき，

$$\mathbf{z} = \mathbf{By} = \mathbf{B}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{BAx} = \mathbf{Cx} \tag{2.16}$$

であるが，一般に行列の積 **BA** は不可換（順番を入れ替えると異なる結果になる．すなわち $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$）なので，結果として生じる変形 **C = BA** では，**A** か **B** のどちらが先に起こったかの順番が大切である．これが大変形理論の特徴である．

一方，微小変形理論では，$\boldsymbol{\beta}_A$ や $\boldsymbol{\beta}_B$ の各成分の絶対値が１に比べて微小量と考え，

$$\mathbf{z} = \mathbf{BAx} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}_B)(\mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}_A)\,\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}_A + \boldsymbol{\beta}_B + \boldsymbol{\beta}_B\,\boldsymbol{\beta}_A)\,\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}_A + \boldsymbol{\beta}_B)\,\mathbf{x} \tag{2.17}$$

と，最終辺のように変形勾配の２次以上の項を無視して表す．したがって，トータルの変位 **u** は

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x} = (\boldsymbol{\beta}_A + \boldsymbol{\beta}_B)\,\mathbf{x} \tag{2.18}$$

となる．ここで行列の和 $\boldsymbol{\beta}_A + \boldsymbol{\beta}_B$ は可換（順番によらない）なので，(2.18) で $\boldsymbol{\beta}_A$ と $\boldsymbol{\beta}_B$ のどちらが先に起こったかの順番は最終の変形に影響しない．

以上のように，微小変形理論では順番によらない変形の重ね合わせが可能である．さらに，(2.18) から，微小変形理論では，２つの変位 $\mathbf{u}_A = \boldsymbol{\beta}_A\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}_B = \boldsymbol{\beta}_B\mathbf{x}$ を，常に初期状態 **x** を基準にして考えていること（$\mathbf{u}_B = \boldsymbol{\beta}_B\mathbf{y}$ ではないということ）も理解できる．

材料学では，相変態に伴う結晶学や２つの結晶の間の方位関係を論じることがよくある．これらを厳密に取り扱うときは，近似が含まれない大変形理論に基づく解析を行う．一方，材料中に存在する内部応力状態や弾性場を取り扱うときは，大変形理論では変形の重ね合わせが効かないためと，見通しのよい解析ができないために，微小変形理論に基づく解析を行う．次の線形弾性論はその典型的な例である．

第２章練習問題

問題 2.1　右図のように一辺１の正方形が太線のような平行四辺形に変形したときの微小変形理論に基づく変位，変形勾配，ひずみ，回転の各成分を求めよ．

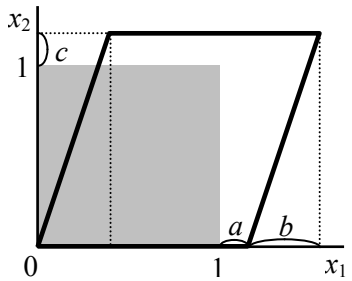

図 2.4

★問題 2.2　図 2.5(a) のような２次元座標系で，元々単位半径の円形であった領域 I が x_1 方向に縮み，x_2 方向に伸びて楕円形の領域 II になったとする．このときの大変形理論に基づく変形行列 **D** を，x_1-x_2 座標系で次のように表す．

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < \eta_1 < 1 < \eta_2 \tag{2.19}$$

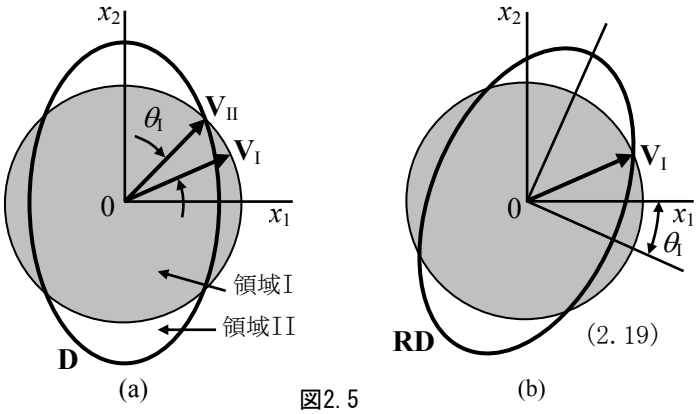

図2.5

(1) 領域 I の円上にあった長さ１のベクトル $\mathbf{V}_I$ が **D** による変形後 $\mathbf{V}_{II}$ になったとする．ベクトル $\mathbf{V}_I$ と $\mathbf{V}_{II}$ の長さが等しいとき，元のベクトル $\mathbf{V}_I$ の x_1，x_2 成分を求めよ．

(2) 図 2.5(b) のように，領域 II を回転 **R** により右回転して $\mathbf{V}_{II}$ を $\mathbf{V}_I$ に一致させるための回転角 θ_I を η_1 と η_2 の関数として求めよ．