Advanced Macroeconomics

(Department of Social Engineering, Spring FY2015)

The Efficiency Wage Model

Ryoji Ohdoi

Dept. of Social Engineering, Tokyo Tech

July 8, 2015

Revised: July 20, 2015

Efficiency Wage Hypothesis

- So far, we have treated labor as an input in much the same way as capital.
- Workers, however, can choose levels of effort unlike capital.
- In general, unfortunately, informations about workers, in esp. about the informations about their work attitude are imperfect.
  $\Downarrow$
- the employee-employer relation:
  - workers choose level of effort
  - employers are unable to monitor their effort.

  $\Rightarrow$ firms have to *unilaterally set wages*.

Setup of the Model

- Basically, the model is a discrete-time counterpart of Shaprio and Stiglitz (1984):
- Time is discrete and indexed by $t = 0, 1, 2, \ldots$
- The economy consists of
  1. A continuum of identical workers of measure $N \in \mathbb{R}_{++}$;
  2. Many identical firms, the number of which is discrete and denoted by $M \in \mathbb{Z}_{+}$.

Production Technology

- For simplicity, the role of physical capital for production is assumed away in this model.

- Consider the firm $i(=1,2,\ldots,M)$. This firm's output, $Y_{i,t}$, is produced according to the following technology:

$$Y_{i,t} = AL_{i,t}^{1-\alpha}, \quad A > 0, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

ここで，$L_{i,t}$ は企業 i によって雇われた労働者のうち，実際に労働力として役に立つ労働者
(詳細は次のスライドで説明)

($*$) If $\alpha = 1$, the technology exhibits the CRS, otherwise DRS.

Problem of Shirking

- 各労働者は，潜在的に 1 単位の労働力を有していると仮定
  $\Leftrightarrow$ これまでどおり，雇用人数と労働力を特に区別する必要なし

- 新たに，以下を仮定：

Assumption

1. 怠業 *(shirking)* の可能性 *(NEW!)*： 各労働者は，(被る不効用と引き換えに) 努力をしたときのみ，実際に生産要素としての意味を持つ (つまり，労働力 $= 1$).
   もし努力を怠った場合は，この労働者は財の生産に貢献しない (労働力 $= 0$).

2. 不完全モニタリング *(NEW!)*： 各企業は，各労働者の努力度を財の生産過程においては観察できず， 事後的にも，確率的にしか怠業を発見できない

(∗) 波線部について補足すると，雇用量，生産量が観察できるので「怠業した労働者数，またはその全体に占める割合」は観察できるが,「誰が怠業したか」の識別については確率的にしか不可能.

Problem of Shirking

- $\widetilde{L}_{i,t}$ を企業 i の雇用とすると，$L_{i,t} = \widetilde{L}_{i,t} -$ 怠業した人数.
- もう一つ重要な仮定：

Assumption

毎期の企業—労働者間の賃金契約は，生産が行われるより前に締結される.

$\Rightarrow$ 各企業は努力度に応じて賃金を差別化することはできない．唯一できる「個別の対応」は発見できた怠業労働者をその期の最後に解雇すること.

Firms' Problem

- 企業 i の利潤最大化問題：

$$\max_{w_{i,t},L_{i,t}} \Pi_i = AL_{i,t}^{1-\alpha} - w_{i,t}\widetilde{L}_{i,t} \tag{1}$$

$\Rightarrow$ 提示した賃金のもとで労働者が真面目に働くかが企業にとって重要.
$\Rightarrow$ 労働者の行動をまず分析する必要.

Workers' Behaviors

- It is assumed that there is no asset unlike the Ramsey-Cass-Koopmans Model.

  $\Rightarrow$ Each household (worker) consumes all of her income flow in each period.

- In any periods, each worker is in either of the following two states:
  1. Employed (denoted by E);
  2. Unemployed (denoted by U).

  $\Rightarrow$ Let $x_t \in \{E, U\}$ denote the state of each worker in period t.

Workers' Behaviors

- Each worker's preference in period t is given by the following expected utility function:

$$E_t \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} u(s, x_s), \tag{2}$$

where the one-period utility $u(t, s_t)$ is specified as

$$u(t, x_t) = \begin{cases} w_t - e_t & \text{if } x_t = E, \\ b & \text{if } x_t = U. \end{cases} \tag{3}$$

- Notations:
  - w_t: wage rate;
  - b: unemployment benefits (失業給付);
  - e_t: level of effort on the job.

Workers' Behaviors

Assumption (Discrete Choice)

In any periods, each worker of $x_t = E$ chooses e_t from $\{0, \bar{e}\}$, where $\bar{e} > 0$.

- つまり，$e_t = \bar{e}$ を選べばこの労働者の労働力 $= 1$，$e_t = 0$ を選べば労働力 $= 0$ (shirking)

- Notes:
  1. (3) 式にあるように，$e_t = 0$ を選んで怠業しても，真面目に働いた労働者と同じ賃金率が得られる．
  2. 従って，もし経済が静学的な環境ならば，迷わず $e_t = 0$ を選ぶのが最適

$\Rightarrow$ このモデルの動学的な環境では，怠業は確率的に発覚 $\rightarrow$ 解雇．

Markov Chain of Workers' States

- $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ of each worker is a stochastic sequence. Here, we assume that it is a Markov chain (マルコフ連鎖).
- More specifically, we assume

$$\text{Prob}(x_{t+1} = U \mid x_t = E) = \delta(e_t), \tag{4}$$

ここで，$\delta : \{0, \bar{e}\} \to (0, 1)$ は t 期 から $t+1$ 期にかけての離職確率

Markov Chain of Workers' States

- ここで，真面目に働く $(e_t = \bar{e})$ のときの離職確率 $\delta(\bar{e})$ を job destruction rate (雇用消失率) という．

  $(*)$ JDR: 何らかの外生的なショックにより失業する確率

- 怠業する $(e_t = 0)$ 場合，その期の最後に怠業が発覚する確率を外生的に $\lambda \in (0, 1)$ とすると，$\delta(0)$ を以下で与える．

$$\delta(0) = 1 - (1 - \delta(\bar{e}))(1 - \lambda) > \delta(\bar{e}) \tag{5}$$

  $(*)$ 怠業した場合は，自然な離職，もしくは怠業の摘発のどちらか一つでも起きれば解雇

Markov Chain of Workers' States

- It is easily verified that

$$\begin{aligned}\delta(0) - \delta(\overline{e}) &= 1 - (1 - \delta(\overline{e}))(1 - \lambda) - \delta(\overline{e}) \\ &= \lambda(1 - \delta(\overline{e})) > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Bellman Equation

- Let $V : \{E, U\} \to \mathbb{R}$ denote the value function of a worker.
- The Bellman equation of the worker ($x_t = E$):

$$V(E) = \max_{e \in \{0, \bar{e}\}} \{w - e + \beta [(1 - \delta(e))V(E) + \delta(e)V(U)]\}, \tag{7}$$

- The Bellman equation of the worker ($x_t = U$):

$$V(U) = b + \beta [(1 - q)V(U) + qV(E)], \tag{8}$$

ここで，$q \in (0, 1)$ は就職確率.

(*)q は内生変数，ただし経済全体の労働市場均衡から決定されると仮定.

No-shirking Condition

- 状態 E にいる ($\Leftrightarrow$ 被雇用中の) 労働者は，賃金率 w を所与として，ベルマン方程式 (7) の右辺を最大にするように努力度 e を決定する．
- $e = \overline{e}$ が最適となるために賃金率 w が満たすべき条件を No-shirking condition (非怠業条件, NSC) という．
- Derivation of NSC:
  1. Suppose that $e = 0$ (shirking) is optimal. Then,

$$V(E) = V^S(E) = \frac{w + \beta\delta(0)V(U)}{1 - \beta(1 - \delta(0))}. \tag{9}$$

  2. Suppose that $e = \overline{e}$ (no-shirking) is optimal. Then,

$$V(E) = V^N(E) = \frac{w - \overline{e} + \beta\delta(\overline{e})V(U)}{1 - \beta(1 - \delta(\overline{e}))}. \tag{10}$$

No-shirking Condition

- Derivation of Derivation of NSC (cont'd):
  1. Then, the Bellman equation (7) is rewritten as

$$V(E) = \max\{V^S(E), V^N(E)\}. \tag{7'}$$

  2. From (9) and (10), the NSC is given by

$$w \geq (1-\beta)V(U) + \frac{1-\beta(1-\delta(0))}{\beta(\delta(0)-\delta(\overline{e}))}\overline{e}. \tag{11}$$

Hereafter, let $\hat{W}$ denote the value of the RHS.

($*$) Since $V(U)$ is still to be determined, so is $\hat{W}$.

Steady State Equilibrium

Definition

The steady state equilibrium with no-shirking is $(w, L, V^N(E), V^S(E), V(U), q)$ such that

$$V^S(E) = \frac{w + \beta\delta(0)V(U)}{1 - \beta(1 - \delta(0))}, \tag{9}$$

$$V^N(E) = \frac{w - \overline{e} + \beta\delta(\overline{e})V(U)}{1 - \beta(1 - \delta(\overline{e}))}, \tag{10}$$

$$w \geq \hat{W}, \tag{11}$$

$$V(U) = \frac{b + \beta q V^N(E)}{1 - \beta(1 - q)} \ (\because (8)), \tag{12}$$

$$V^N(E) \geq V(U), \tag{13}$$

$$w = A(1 - \alpha)L^{-\alpha} \ (\because (1)), \tag{14}$$

$$L_{t+1} = q(N - L_t) + (1 - \delta(\overline{e}))L_t, \tag{15}$$

$$L_{t+1} = L_t. \tag{16}$$

Partial Equilibrium

- 均衡を特徴付ける (9)–(16) のうち，(14) 以外は線形の方程式.
  ⇒ 数学的には難しくないが，解いた結果は些か煩雑.
- 従って，まずは先に部分均衡から考えて，その後に上記の一般均衡を考える.
- つまり，モデルから以下の 2 つの側面をあえて一旦落とす：
  1. 企業の労働需要決定条件 (14),
  2. 定常状態における雇用人口決定条件 (15), (16)

  ⇒ 単に，一企業が「雇った労働者に真面目に働くインセンティブを与えるには，どのような賃金を提示する必要があるか？」という問題に帰着する.

部分均衡バージョン

- この簡単化バージョンは，Gibbons (1992, Ch.2) で解説されている．そこでの設定に従い，$q = 0$，すなわち一度解雇されたら再就職の可能性はないとする．
- $V(U)$ の定義式 (12) より，即座に $V(U) = \dfrac{b}{1-\beta}$，すなわち失業の価値は失業給付の割引現在価値に等しい．
- これを踏まえて，企業は労働者に
  - まじめに働く (no-shirking) $\Leftrightarrow$ (11) が成立，かつ
  - 参加制約 (participation constratint) を満たす $\Leftrightarrow$ (13) が成立

  が成立するような賃金 w をオファーするかぎり，労働者は真面目に働く．

部分均衡バージョン

- 非怠業条件 (11) は

$$w \geq \hat{W} \Leftrightarrow w \geq (1-\beta) \underbrace{V(U)}_{=b/(1-\beta)} + \frac{1-\beta(1-\delta(0))}{\delta(0)-\delta(\overline{e})}\overline{e}$$

$$\Leftrightarrow w \geq b + \frac{1-\beta(1-\delta(0))}{\beta(\delta(0)-\delta(\overline{e}))}\overline{e} \tag{17}$$

- 両辺から $\overline{e}$ を引くと

$$\begin{aligned} w - \overline{e} &\geq b + \frac{1-\beta(1-\delta(\overline{e}))}{\beta(\delta(0)-\delta(\overline{e}))}\overline{e} \\ &> b \\ \therefore w &> \overline{e} + b \end{aligned} \tag{18}$$

部分均衡バージョン：含意

- (18) 式の意味： 努力を引き出すためには，企業は労働者に
  1. アウトサイドオプション (b)
     +
  2. 努力度の埋め合わせ ($\bar{e}$)

  を足した額よりも，更に高い賃金を設定しなければならない．

- (18) 式を満たす最も低い賃金を提示するのがこの企業の最適行動：

$$w = b + \frac{1 - \beta(1 - \delta(\bar{e}))}{\beta(\delta(0) - \delta(\bar{e}))}\bar{e}. \tag{19}$$

- 重要: (19) 式のもとで，参加制約 (13) は厳密な不等号で成立する．(簡単．各自確認すること)．

  $\Rightarrow$ 失業するより真面目に働くほうが効用が高い．

部分均衡バージョン：まとめ

- 企業は労働者から努力を引き出すために，その努力をカバーする以上の賃金を提示しなければならない．
  $\Rightarrow$ これが失業者と就業者との間に所得格差 (効用格差) を生み出す．
- これが市場全体に及ぼす影響は？
  $\Rightarrow$ (14)–(16) を分析に加える．

注意：　従って，就職確率 q は以降は内生的に決定される．

Steady State Equilibrium

- 以降は，煩雑さを避けるため，$\beta = \dfrac{1}{1+\rho}$ $(\rho > 0)$ の関係式を用いる．
- From (10) and (12),

$$\frac{\rho}{1+\rho} V^N(E) = \frac{(\rho+q)(w-\overline{e}) + \delta(\overline{e})b}{\rho+q+\delta(\overline{e})}, \tag{20}$$

$$\frac{\rho}{1+\rho} V(U) = \frac{q(w-\overline{e}) + (\rho+\delta(\overline{e}))b}{\rho+q+\delta(\overline{e})}. \tag{21}$$

Steady State Equilibrium

- (21) で得た $V(U)$ を非怠業条件 (11) に代入：

$$w \geq \frac{\rho}{1+\rho}V(U) + \frac{\rho+\delta(0)}{\cancel{(1+\rho)}(\delta(0)-\delta(\bar{e}))}\bar{e},$$

$$= \frac{q(w-\bar{e})+(\rho+\delta(\bar{e}))b}{\rho+q+\delta(\bar{e})} + \frac{\rho+\delta(0)}{\cancel{(1+\rho)}(\delta(0)-\delta(\bar{e}))}\bar{e}.$$

- これをさらに整理すると

$$w \geq b + \left(1 + \frac{\rho+\delta(\bar{e})+q}{\delta(0)-\delta(\bar{e})}\right)\bar{e}. \tag{22}$$

(∗) 右辺は q に関して増加的

- 一方で，(15) 及び (16) より

$$L = q(N-L) + (1-\delta(\bar{e}))L \Rightarrow q = \frac{\delta(\bar{e})L}{N-L}. \tag{23}$$

(∗) 就業者数 L が増加すると就職確率 q が増加.

Steady State Equilibrium

- この (22), (23) 式より，非怠業条件 (NSC) を満たす賃金の閾値 (threshold) は就業者数 L が増加すると上昇する.
- 一方，最後に残った (まだ使っていない) 企業の労働需要 (14) を再掲すると

$$w = A(1-\alpha)L^{-\alpha}. \tag{24}$$

こちらは賃金が上昇すると労働需要を下げる，という通常の関係
$\Downarrow$
この非怠業条件 (NSC) と企業の労働需要条件から定常状態における均衡賃金と雇用量が決定.

Steady State Equilibrium

- 離散時間を仮定しているため，q の上限は 1. $\Rightarrow$ L の上限は (23) より $\overline{L} \equiv N/(1+\delta(\overline{e})) < N$.

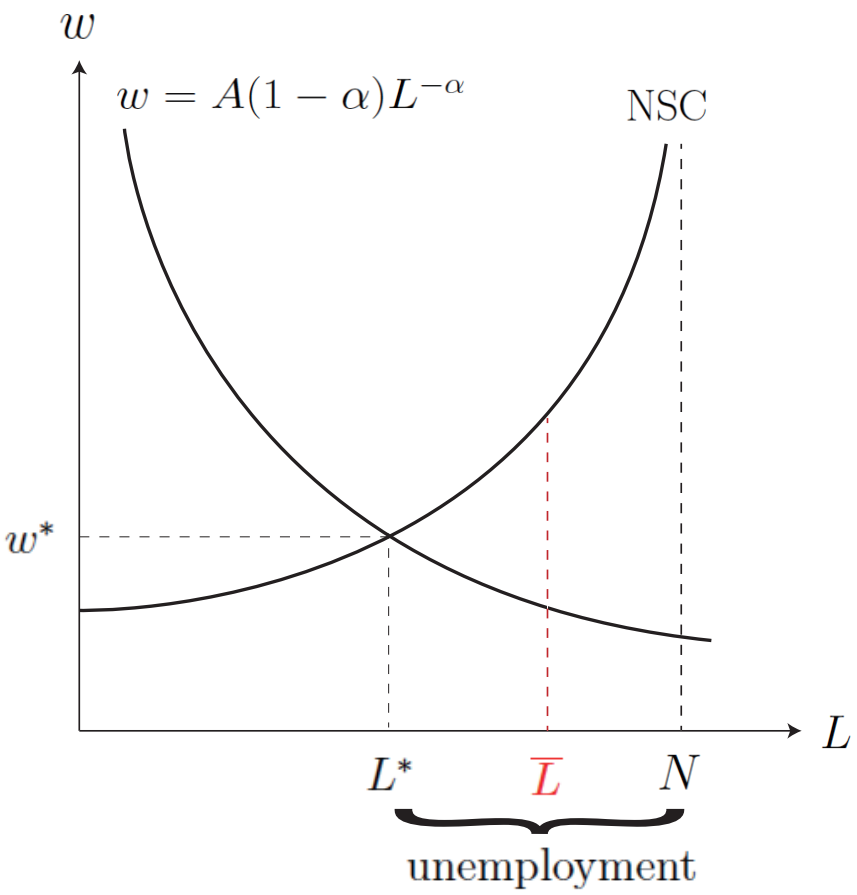
  (*) オリジナルの Shapiro–Stiglitz(1984) モデルのように連続時間を想定する場合，$q \times dt < 1$．従って dt を小さくすることで q をいくらでも大きい値にすることができる．(このとき $q > 0$ はポアソン過程の到着率 (arrival rate) に対応する)

- 離散時間を仮定する今回のバージョンでは，以下を追加的に仮定する必要がある：

Assumption

$$A(1-\alpha)\overline{L}^{-\alpha} < b + \left(1 + \frac{\rho + \delta(\overline{e}) + 1}{\delta(0) - \delta(\overline{e})}\right)\overline{e}.$$

Steady State Equilibrium



Implications

- There is unemployment in equilibrium: i.e., the equilibrium wage rate does not clear the market.
- The unemployment is involuntary: all job seekers would prefer to work to unemployed.
- So, all unemployed would prefer to work even at lower wage rate, but can NOT make a credible promise not to shirk at such wage.
  $\Rightarrow$ the wage rate does not fall.
- The unemployment results because of firms' inability to monitor the activities of their employees costlessly.

References

- Gibbons, R. (1992) *Game Theory for Applied Economists*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Shapiro, C. and J. E. Stiglitz (1984) "Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device." *American Economic Review*, vol. 74, pp. 433–444.