東京工業大学大学院　経営工学専攻

2015/5/22

年金数理第6回

年金現価･終価･極限方程式

講師　:　渡部善平((株)IICパートナーズ)

第6回の目的

- 確定年金現価の算式について理解する
- 終身年金現価の算式について理解する
- 簡単な例で掛金の計算をしてみる
- 極限方程式を理解する

確定年金現価・終身年金現価

確定年金・確定年金現価

確定年金　:　年金受給者の生死にかかわらず一定期間の支払いを約束する年金

例　:

2015年4月開始、年金額1,000,000円、期末払い5年確定年金

支払い時期	年金額
2016年3月	1,000,000円
2017年3月	1,000,000円
2018年3月	1,000,000円
2019年3月	1,000,000円
2020年3月	1,000,000円

年金数理のテーマ:

この確定年金の「価値」は？

確定年金・確定年金現価（実例）

年金額1,000,000円。期末払い。5年確定年金。年利率3%

この場合の確定年金現価率は？確定年金現価は？

年度	期末支払い年金額	1年度始現価率（算	1年度始現価率	1年度始現価
1	1,000,000	1/1.03	0.970874	970,874
2	1,000,000	(1/1.03)^2	0.942596	942,596
3	1,000,000	(1/1.03)^3	0.915142	915,142
4	1,000,000	(1/1.03)^4	0.888487	888,487
5	1,000,000	(1/1.03)^5	0.862609	862,609
合計	5,000,000		4.579707	4,579,707

$$a_{\overline{5|}}$$

確定年金・確定年金現価

確定年金　：　年金受給者の生死にかかわらず一定期間の支払いを約束する年金

確定年金現価の算出

期末払い

第１回目の支払の現価・・・・・・　Pv

第２回目の支払の現価・・・・・・　Pv^2

n 回目の支払の現価・・・・・・　Pv^n

$$Pv+Pv^2+\cdots\cdots+Pv^n=P\left(v+v^2+\cdots\cdots v^n\right)=P\cdot v\frac{1-v^n}{1-v}=Pa_{\overline{n}|}$$

$a_{\overline{n}|}$　：　年１回期末払いの場合の確定年金現価率
（＝年金額1に対する確定年金現価）

確定年金･確定年金現価

確定年金　:　年金受給者の生死にかかわらず一定期間の支払いを約束する年金

確定年金現価の算出

期始払い

第１回目の支払の現価・・・・・・　P

第２回目の支払の現価・・・・・・　Pv

n 回目の支払の現価・・・・・・　Pv^{n-1}

$$P+Pv+\cdots\cdots+Pv^{n-1}=P\left(1+v+\cdots\cdots v^{n-1}\right)=P\cdot\frac{1-v^{n}}{1-v}=P\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$　:　年１回期始払いの場合の確定年金現価率
（＝年金額1に対する確定年金現価）

重要なことは
具体的な数値の大きさについて
感触を味わうこと

生命年金･生命年金現価

生命年金　：　年金受給者が生存している限り、一定期間（または終身）
の支払いを約束する年金

生命年金現価の算出　(例）x歳開始、ω-1歳終了の 終身年金現価，ω歳：最終年齢

期始払い

x歳の支払の現価・・・・・・　$l_x \cdot P$

l_x　：　生命表における x歳の人数

x＋１歳の支払の現価・・・・・・　$l_{x+1} \cdot Pv$

ω−1歳の支払の現価・・・・・・　$l_{\omega-1} \cdot Pv^{\omega-1-x}$

$$l_x \cdot P + l_{x+1} \cdot P \cdot v + \cdots + l_{\omega-1} \cdot P \cdot v^{\omega-x-1} = l_x \cdot P(1 + l_{x+1}/l_x \cdot v + \cdots + l_{\omega-1}/l_x \cdot v^{\omega-x-1})$$

生命年金・生命年金現価

ここに

$$1+\frac{l_{x+1}}{l_x}v+\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2+\cdots+\frac{l_{\omega-1}}{l_x}v^{\omega-1-x}=\sum_{X=x}^{\omega-1}\frac{l_X}{l_x}v^{X-x}$$

は、 x 歳における年金額1に対する x 歳開始の、

1人あたりの終身年金現価であり、

$\ddot{a}_x$ と表す。

これを用いて、x 歳における年金額 Pに対する l_x 人あたりの年金額（前のスライドの最終式）は、 $l_x \cdot P \cdot \ddot{a}_x$

となる。

実例　：　60歳開始終身年金現価

X	l_X	v^{X-60}
60	1000	1.00000
61	965	0.97087
62	930	0.94260
63	895	0.91514
64	860	0.88849
65	825	0.86261
66	790	0.83748
67	755	0.81309
68	720	0.78941
69	685	0.76642
70	650	0.74409
71	570	0.72242
72	490	0.70138
73	410	0.68095
74	330	0.66112
75	250	0.64186
76	170	0.62317
77	90	0.60502
78	10	0.58739
79	5	0.57029
80	0	0.55368

年金額:1；　年利率3%

l_{60}　:1,000

P　:1

$$\ddot{a}_x = \sum_{X=x}^{\omega-1} \frac{l_X}{l_x} v^{X-x}$$　9.543

60歳時の終身年金現価率

$$l_{60} \cdot P\ddot{a}_x$$　9,543.23

60歳時の人数1,000人、年金額1に対する生命（終身）年金現価

簡単な掛金計算

給付:一時金、掛金:一時払い

- 5年後に1,000,000円。年利率３%。
- 一時払いの掛金でこの給付をまかなうとして、掛金額を求めよ

(解)＜基本的には1,000,000円の「現価」を求める＞

$$P \cdot 1.03^5 = 1{,}000{,}000$$ 終価を用いた関係式

$$P = 1{,}000{,}000 \cdot (1/1.03)^5$$ 現価を用いた関係式

$$P \cdot (1+i)^5 = 1{,}000{,}000$$ 終価を用いた関係式

$$P = 1{,}000{,}000 \cdot v^5$$ 現価を用いた関係式

P は？

給付：一時払い、掛金：数年で積立

- 5年後に1,000,000円。年利率３%。
- 今から5年間の期始払いでこの給付をまかなうとした場合の掛金額は？

終価を用いたアプローチ

$$P(1+i)^5 + P(1+i)^4 + P(1+i)^3 + P(1+i)^2 + P(1+i) = S$$

$$P \longrightarrow P(1+i)^5$$

$$P \longrightarrow P(1+i)^4$$

$$P \longrightarrow P(1+i)^3$$

$$P \longrightarrow P(1+i)^2$$

$$P(1+i)^1$$

給付：一時払い、掛金：数年で積立

- 5年後に1,000,000円。年利率３%。
- 今から5年間の期始払いでこの給付をまかなうとした場合の掛金額は？

現価を用いたアプローチ

$$P + Pv + Pv^2 + Pv^3 + Pv^4 = Sv^5$$

$$P$$

$$Pv \leftarrow P$$

$$Pv^2 \longleftarrow P$$

$$Pv^3 \longleftarrow P$$

$$Pv^4 \longleftarrow P$$

$$Sv^5 \longleftarrow S$$

給付:一時払い、掛金:数年で積立

$$P = Sv^5 / (1 + v + v^2 + v^3 + v^4)$$

今 S が1,000,000円

$$v^5 / (1 + v + v^2 + v^3 + v^4)$$

が 0.182869

なので、P は、182,869円

給付：年金、掛金：一時に積立

- 現在50歳、60歳開始終身年金
- 年金額1、年利率３％
- 掛金を一時払いで積み立てる
- 人員は別(スライド19)に示す脱退残存表のように推移するものと仮定

手順

ステップ1 :60歳時点の終身年金現価を計算
ステップ2 :50歳時点の、上記金額の期待値を求める
ステップ3:その金額の50歳時点の現価を求める
（この金額が、50歳時点の一時払い掛金）

ステップ1:　60歳時点の終身年金現価は9.543 (スライド19より）

ステップ2:　この額の50歳時点の期待値は　9.543×50歳から60歳まで生存する確率

$l_{60}/l_{50} = 1000/1020 = 0.9803$ をかけて、9.356を算出

ステップ3:50歳時点の現価は9.356× v^{10}

$$= 9.356 \cdot (1/1.03)^{10} = 9.356 \cdot 0.7441 = 6.962$$

給付：年金、掛金：一時に積立

算式によるフォロー

ステップ1　$\ddot{a}_{60} = 9.543$

ステップ2　$(l_{60}/l_{50}) \cdot \ddot{a}_{60}$ =1000/1020*9.543=9.356

ステップ3　$(l_{60}/l_{50}) \cdot \ddot{a}_{60} \cdot v^{60-50}$ =9.356*0.7441=6.962

次頁
数値に関する設定を参照

数値に関する設定

X	l_X	v^{x-50}	X	l_X	v^{X-60}
50	1020	1	60	1000	1.00000
51	1018	0.970874	61	965	0.97087
52	1016	0.942596	62	930	0.94260
53	1014	0.915142	63	895	0.91514
54	1012	0.888487	64	860	0.88849
55	1010	0.862609	65	825	0.86261
56	1008	0.837484	66	790	0.83748
57	1006	0.813092	67	755	0.81309
58	1004	0.789409	68	720	0.78941
59	1002	0.766417	69	685	0.76642
60	1000	0.744094	70	650	0.74409
			71	570	0.72242
			72	490	0.70138
			73	410	0.68095
			74	330	0.66112
			75	250	0.64186
			76	170	0.62317
			77	90	0.60502
			78	10	0.58739
			79	5	0.57029
			80	0	0.55368

$$\ddot{a}_{60} = \sum_{X=60}^{79} \frac{l_X}{l_x} v^{X-60} = 9.543$$

$$\sum_{X=50}^{59} l_X v^{50-X} = 8887.035$$

給付：年金、掛金：数年で積立

- 現在50歳、60歳開始終身年金
- 年金額1、年利率３％
- 今から10年間期始払いで掛金を積み立てる

手順

ステップ1 :60歳時点の終身年金現価を計算

ステップ2 :現在50歳なので、上記金額の期待値を求める

ステップ3:その金額の50歳時点の現価を求める

ステップ4:その金額を50歳から10年間で積み立てる(途中の死亡・退職による積立中止を考慮にいれる

ステップ４の方程式（50歳の人員数に関する算式）

$$P(l_{50}+l_{51}v+l_{52}v^2+\cdots+l_{59}v^9)=l_{60}v^{60-50}\ddot{a}_{60}$$

これを解くと

$$P=\frac{l_{60}v^{10}\ddot{a}_{60}}{l_{50}+l_{51}v+l_{52}v^2+\cdots+l_{59}v^9}$$

給付:年金、掛金:数年で積立

前のスライドと数値例(スライド19)より

$$P = \frac{l_{60} v^{10} \ddot{a}_{60}}{l_{50} + l_{51} v + l_{52} v^2 + \cdots + l_{59} v^9}$$

$$= \frac{1000 \cdot 0.7441 \cdot 9.543}{8887.035} = 0.7990$$

定常状態と極限方程式

「財政計画を立てる」とは

- 給付の発生状況を予測し、それをまかなうための掛金・年金資産・利息収入に関する計画を立てること
- 給付算定式をひとつに決めれば、**給付の発生状況の予想は**一様に予測可能
- これに対し、これをまかなう**掛金・利息・年金資産の組み合わせは無数に存在する**
- 財政計画のパターンを決めるポイント
  - どのように掛金を積み立てるか
  - どれだけ年金資産を積み立てるか
  - 掛金と利息の大きさの割合をどのように設定するか

定常状態とは
-財政計画を理論的に考える実験室-

- 定常人口
  - 人員数の年齢分布が脱退残存表どおりの状態
- 定常状態
  - 定常人口の状態にあり、かつ掛金(総額)・給付(総額)が一定水準である状態
  - この結果、必然的に年金資産額も一定水準となる(後述)

⇒ 定常状態では、掛金・給付・年金資産が一定

（年金数理の基礎理論で）なぜ定常状態を考えるか

- 理論のベースとなるモデルは極力シンプルであるほうがよい
  - 議論をシンプルにするため、なるべく変数を少なくする

  事業規模一定

  ⇒　従業員規模一定

  ⇒　従業員の勤続・年齢構成も一定

  ⇒　毎年の退職給付支払総額も一定（必然）

  また一方毎年の掛金総額も一定（<u>となるように財政計画を立てる</u>）

- 年金数理の技術上の要請

  定常状態を前提にすると、財政方式の定式化が非常に簡明になる

  （もし諸々のものが一定でなければ、どのように一定でないかパラメータが無数に必要になる）

定常状態では極限方程式が成立している(1)

- ひとりの人間の収支相等でなく、集団(企業)全体の収支であることに留意
- 定常状態では、
  - 給付額一定
  - 掛金額一定

    このとき、年金資産額が際限なく増加もしくは減少しないためには、その水準がある一定(時間経過により変化しない)の額に達している必要がある

(証明)　給付支払い、掛金額支払いは年始に発生し、利率は一定とする

F_n　n 年度末年金資産

B　(一定)給付額　　i　利率　　C　(一定)掛金額

$$F_{n+1} = (F_n + C - B)(1+i) \qquad F_{n+2} = (F_{n+1} + C - B)(1+i)$$

$$\Rightarrow F_{n+2} - F_{n+1} = (F_{n+1} - F_n)(1+i) > F_{n+1} - F_n \text{（} F_{n+1} - F_n > 0 \text{ の場合 ）}$$

$$F_{n+2} - F_{n+1} = (F_{n+1} - F_n)(1+i) < F_{n+1} - F_n \text{（} F_{n+1} - F_n < 0 \text{ の場合 ）}$$

定常状態では極限方程式が成立している（２）

- 年金資産が際限なく増加することも、際限なく減少することも、好ましくない
- すなわち、一定の年金資産額を保つことが必要になる。

- すなわち定常状態では、
  - 給付額一定
  - 掛金額一定

  のほか
  - 年金資産額一定

  の要件が加わる

$F_{n+1} = (F_n + C - B)(1+i)$ で $F_{n+1} = F_n = F$

とすると $F = (F + C - B)(1+i)$ より $C + dF = B$

ここに $d = \dfrac{i}{1+i}$ 　 $C + dF = B$ の関係式を極限方程式という

極限方程式の意味

$$C + dF = B \qquad\qquad F = \frac{B - C}{d}$$

- 給付額は、人員分布と制度内容が決まれば一意的に決まるが
- 掛金額と年金資産水準は、互いに一方を先に決めれば、他方が自動的に決まる関係
- 年金資産額と掛金額はトレードオフ（一方が大きくなれば他方は小さくなる）関係

（例） 毎年の給付額100、利率5%の場合

－年金資産額525を保つために必要な掛金額は？

－掛金額80で運営になる年金資産額は？

極限方程式成立時の諸数値

$$C = 75 \qquad d = 0.05/1.05$$

$$F = 525 \qquad B = 100$$

75 + (0.05/1.05)*525=100

定常状態までの道のり（重要）

$$C + dF = B$$

- 今、定常人口は達成しているが、定常状態に達していない場合を考える
  （例）給付額は毎年100発生する←発足直後でも給付をフルに支給。
  しかしながら、制度発足時点では年金資産額はゼロ
  （標準）掛金75、利率5%で制度運営したい
- 定常状態実現のための方法
  - 制度発足と同時に年金資産額525を一時に積み立てる（一括拠出）
  - 数年かけて年金資産額が525になるように（特別）掛金を積み立てる

標準掛金　：　定常状態の掛金（*C*)

特別掛金　：　定常状態に達するまでの間、標準掛金に加えて積み立てる掛金

極限方程式成立時の諸数値（再掲）

$$C = 75 \qquad d = 0.05/1.05$$

$$F = 525 \qquad B = 100$$

75 + (0.05/1.05)*525=100

定常状態までの道のり（重要）

- 特別掛金設定の考え方
  a. 一度に積み立てる
  b. 一定年数で積み立てる（たとえば年始払い5年）

設例の場合、

　a.の方法をとれば、発足時に525の特別掛金を積み立てれば定常状態達成

　b.の方法をとったとき方法は、あたかも最初に525の借金をしてそれを計画的に返済するのと同じ

525の借金をし、それを5年で返すためにはいくらずつ返せばよいか？

年始払い5年確定年金現価＝525　となるような年金額と同額の特別掛金Pを求める

$$525 = P + P(\frac{1}{1+i}) + P(\frac{1}{1+i})^2 + P(\frac{1}{1+i})^3 + P(\frac{1}{1+i})^4 = P\sum_{t=0}^{4} v^t = P\frac{1-v^5}{1-v}$$

ここに$v=1/(1+i)$,$i=5\%$、これを解いて$P=115.5$

定常状態までの道のり

$$C + dF = B$$

	年始年金資産	標準掛金	特別掛金	給付	利息	年末年金資産
1	0	75	115.5	100	4.5	95.0
2	95.0	75	115.5	100	9.3	194.8
3	194.8	75	115.5	100	14.3	299.5
4	299.5	75	115.5	100	19.5	409.5
5	409.5	75	115.5	100	25.0	525.0
6	525.0	75	0.0	100	25.0	525.0

初年度始において収支相等の算式（制度全体で成立しているはずの収支相等！）は成立しているか（次式の成立を確かめる）

標準掛金収入現価（永久）＋特別掛金収入現価（5年間）＝給付現価（永久）

特別掛金収入現価（5年間）＝給付現価（永久）－標準掛金収入現価（永久）

特別掛金収入現価＝525;

これは$B/d - C/d = F(=525)$と等しい

よって初年度始において、収支相等の関係は成立している

定常状態までの道のり

演習　:　標準掛金の収入現価を求めよ

給付現価を求めよ

質問（講義の内容およびアクチュアリーの件でもOK) は

つぎのメールアドレスおよび電話へ

株式会社IICパートナーズ

渡部　善平

z.watanabe@iicp.co.jp

電話　：　03-5501-3795（直通）