宿題 #7

以下の問いのうちいくつかを選択して解答する（2 つまでの解答を認めます）．〆切は次回（6 月 26 日）の授業終了後（授業前にメールで解答しても構わない）．

課題内容：

1. 計算量クラス $\mathcal{C}$ に対し，次の性質が成り立つとき，クラス $\mathcal{C}$ は還元 $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$ について（下方的に）閉じているという．

$$\forall X, Y\ [\ X \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} Y \wedge Y \in \mathcal{C} \Rightarrow X \in \mathcal{C}\ ]$$

その典型例が P だが，配布資料の定理 5.2 は，NP も還元 $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$ について閉じていることを示している．その証明中で，$|w| \leq q_X(\ell)$ の他に $|w| \leq q_Y(|h(x)|)$ も調べている．なぜか？その必要性について述べよ.（配点：5 点）

2. 一方，定理 5.2 の補足にあるように，クラス E は還元 $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$ について閉じていない．その例（すなわち，$X \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} Y$ かつ $Y \in \mathrm{E}$ でも $X \in \mathrm{E}$ とならない例）を示せ．その理由・証明を述べよ.（配点：5 ∼ 10 点．ヒント：時間計算量の階層定理を用いる）

3. 以下の，クリーク問題に対して，3SAT 問題からの多項式時間還元を示せ.（配点：5 点）

<u>クリーク問題</u> CLIQUE
入力： グラフ G，自然数 k
質問： グラフ G に頂点数 k の部分完全グラフ（clique）が存在するか？
※部分完全グラフとは，その部分グラフ間のすべての頂点間に辺のあるグラフのこと．

4. 以下の，部分和問題に対して，3SAT 問題からの多項式時間還元を示せ.（配点：5 点）

<u>部分和問題</u> SSUM
入力： 自然数 $a_1, \ldots, a_n, W$
質問： 条件 (*) $\sum_{i \in U} a_i = W$ を満たす集合 $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$ が存在するか？

5. 以下の，大合成数問題から SAT 問題への多項式時間還元の概略を示せ.（配点：5 点，考え方が十分わかる程度，正確に示せばよい）

<u>大合成数問題</u> LCOMP
入力： 自然数 N（2 進数表記）
質問： 桁数（2 進数表記で）の等しい 2 つの数 A, B で $N = A \cdot B$ となるか？