**宿題 #4**

以下の問いを選択して解答する．複数（2 問まで）解答してもよい．〆切は次回の授業終了後（授業前にメールで解答しても構わない）．

**課題内容：**

1. ある問題 $X$ が $\mathrm{TIME}[\ell^2]$ に入らないことを示すには，具体的に何を示せばよいかを述べよ.（配点：5 点）

2. 配布プリント（英語）では $f = \Omega(g)$ を「$g = O(f)$ となること」と定義している．この意味での $f = \Omega(g)$ の定義を論理式で書き下してみよ．その上で，教科書（配布プリント）p.56 で説明している $\Omega$-型下界との関係について述べよ.（配点：5 点）

3. 定理 3.4（たとえば $\mathrm{P} \not\subseteq \mathrm{PSIZE}$）を証明せよ.（配点：5 点）

4. 決定問題とは，与えられた問題例に対して，答えが Yes もしくは No となる問題のことである．一方，もっと一般的に，何らかの条件を満たす解を求める問題を解探索問題という．一般に，解探索問題に対しては，それと似た時間計算量を持つ決定問題を定義することができる．その一例を，ある関数 $f$ の計算で考えてみよう．

   関数 $f$ として，任意の $n$ に対し，$\{0,1\}^n$ から $\{0,1\}^n$ への全単射となる関数を考える．つまり，$f(0110) = 1010$ というように，4 ビットも二進列を 4 ビットの二進列に 1 対 1 に対応付ける関数である．与えられた $x \in \{0,1\}^*$ に対し，この関数 $f$ の値を求める問題が $f$ に対する解探索問題とみなすことができる．

   この関数 $f$ の多項式時間時間計算可能性を特徴付ける決定問題 $F$ を定義せよ．具体的には，$F \in \mathrm{P}$ ならば，$f$ の値を計算することが多項式時間計算可能であることを示せるような問題が $F$ である．そのような $F$ を定義し，それが確かに $f$ の多項式時間計算可能性を特徴付けていることを示せ．

   一般の解探索問題では，関数の計算のように，入力に対して値が一意に決まらない場合もある．その場合には，今回提案した方法が使えるかどうかについての述べよ．（配点：5 〜 10 点）