

原子炉理論 第8回 (摂動論)
講義ノート

東京工業大学 小原 徹

7. 摂動論

摂動論：炉心の寸法や組成の微小な変化による増倍率の変化の計算などに有効な方法

7.1 臨界固有値方程式と随伴方程式

臨界固有値方程式

$$-\nabla D \nabla \phi + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) \quad \dots (1)$$

を演算子法で表わすと以下ようになる。

$$M\phi = \frac{1}{k} F\phi \quad \dots (2)$$

ここで、 $M \equiv -\nabla D(\mathbf{r}) \nabla + \Sigma_a(\mathbf{r}) \equiv$ 消滅演算子 (もれ + 吸収)

$F \equiv \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \equiv$ 生成演算子 (核分裂)

この方程式の解は炉心表面での境界条件

$$\phi(\mathbf{r}_s) = 0 \quad \dots (3)$$

をみたす。

任意の2つの関数 $f(\mathbf{r})$ と $g(\mathbf{r})$ の内積を次のように定義する。

$$(f, g) \equiv \int_V d^3r f^*(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) \quad \dots (4)$$

ここで、 $f^*(\mathbf{r})$ は $f(\mathbf{r})$ の複素共役、 V は炉心の体積

演算子 M に対する随伴演算子 $M^\dagger$ の定義

$$(M^\dagger f, g) = (f, Mg) \quad \dots (5)$$

ただし、 $f(\mathbf{r})$ と $g(\mathbf{r})$ は境界条件 $f(\mathbf{r}_s) = 0 = g(\mathbf{r}_s)$ をみたす。

(2)式の随伴方程式の

$$M^\dagger \phi^\dagger = \frac{1}{k} F^\dagger \phi^\dagger \quad \dots (6)$$

の解として、随伴中性子束 $\phi^\dagger$ を定義する。

7.2 1次摂動論

炉心に局所的に吸収体が加わったようなマクロ吸収断面積の摂動による臨界性の変化を考える。

新しい断面積は、

$$\Sigma_a'(\mathbf{r}) = \Sigma_a(\mathbf{r}) + \delta\Sigma_a(\mathbf{r}) \quad \dots (7)$$

となる。

摂動 $\delta\Sigma_a$ が微小量であると仮定する。対応する $\mathbf{k}$ の変化は

$$\mathbf{M}'\phi' = \frac{1}{\mathbf{k}'} F\phi' \quad \dots (8)$$

で表わされる摂動を受けた臨界時の方程式に支配される。このとき

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \delta\mathbf{M}, \quad \delta\mathbf{M} \equiv \delta\Sigma_a(\mathbf{r}) \quad \dots (9)$$

と表わすことが出来る。

(8)式と摂動がない場合の随伴中性子束 $\phi^\dagger$ との内積をとると

$$(\phi^\dagger, \mathbf{M}'\phi') = \frac{1}{\mathbf{k}'} (\phi^\dagger, F\phi') \quad \dots (10)$$

随伴演算子の定義 ((5)式) から、

$$(\phi^\dagger, \mathbf{M}\phi') = (\mathbf{M}^\dagger\phi^\dagger, \phi') = \left(\frac{1}{\mathbf{k}} F^\dagger\phi^\dagger, \phi'\right) = \frac{1}{\mathbf{k}} (\phi^\dagger, F\phi') \quad \dots (11)$$

(9)式, (10)式, (11)式から、以下の式が得られる。

$$\left(\frac{1}{\mathbf{k}'} - \frac{1}{\mathbf{k}}\right) = \frac{(\phi^\dagger, \delta\mathbf{M}\phi')}{(\phi^\dagger, F\phi')} \quad \dots (12)$$

(12)式から、 $\delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ を計算することが出来る。

反応度 ρ を定義する。

$$\rho \equiv \frac{\mathbf{k} - 1}{\mathbf{k}} \quad \dots (13)$$

反応度の摂動 $\Delta\rho$ は、

$$\Delta\rho = \rho' - \rho = \frac{k' - 1}{k'} - \frac{k - 1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} \quad \dots (14)$$

(9)式, (13)式, (14)式から

$$\Delta\rho = -\frac{(\phi^\dagger, \delta\Sigma_a\phi')}{(\phi^\dagger, F\phi')} \quad \dots (15)$$

となる。

摂動 $\delta\Sigma_a$ が小さいので, 対応する中性子束の摂動 $\delta\phi \equiv \phi' - \phi$ も小さいと考えられる。よって

$$\Delta\rho = -\left\{ \frac{(\phi^\dagger, \delta\Sigma_a\phi)}{(\phi^\dagger, F\phi)} + \frac{(\phi^\dagger, \delta\Sigma_a\delta\phi)}{(\phi^\dagger, F\phi)} - \frac{(\phi^\dagger, \delta\Sigma_a\phi)(\phi^\dagger, F\delta\phi)}{(\phi^\dagger, F\phi)^2} + \dots \right\} \quad \dots (16)$$

となる。

ここで, 摂動の2次以上の高次の項を無視すると (1次摂動論)

$$\Delta\rho \cong -\frac{(\phi^\dagger, \delta\Sigma_a\phi)}{(\phi^\dagger, F\phi)} \quad \dots (17)$$

と求められる。

7.3 1群拡散モデルでの摂動論

特に, 1群拡散モデルでは, $\phi^\dagger = \phi$ が成り立つ。よって,

$$\Delta\rho \cong \frac{\int_V d^3r \phi(\mathbf{r}) \delta\Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})}{\int_V d^3r \phi(\mathbf{r}) \nu\Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})} \quad \dots (18)$$

となる。

7.4 中性子インポートランス

炉心内の1点 $\mathbf{r}_0$ に吸収体が挿入されたと考える。

すなわち

$$\delta\Sigma_a(\mathbf{r}) = \alpha\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \dots (19)$$

α : 吸収の実効的な強さ, δ : δ 関数($\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$)

とすると,

$$\begin{aligned}
\Delta\rho &= -\frac{\int_V d^3\mathbf{r}\phi^\dagger(\mathbf{r})\delta\Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})}{\int_V d^3\mathbf{r}\phi^\dagger(\mathbf{r})\nu\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})} \\
&= -\frac{\alpha\phi^\dagger(\mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}_0)}{C} \quad C: \text{定数}
\end{aligned}$$

よって,

$$\phi^\dagger(\mathbf{r}_0) \propto \frac{\Delta\rho}{\alpha\phi(\mathbf{r}_0)}$$

となり, $\phi^\dagger(\mathbf{r}_0)$ は単位時間当り $\mathbf{r}_0$ で吸収される1個の中性子当たりの反応度変化に比例する。このため $\phi^\dagger(\mathbf{r})$ は中性子インポータンス (またはインポータンス関数) とよばれる。