

原子炉理論 第7回（多群拡散理論）
講義ノート

東京工業大学 小原 徹

6. 多群拡散理論

6.1 エネルギー依存拡散理論からの多群方程式の導出

エネルギー依存拡散方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla D \nabla \phi + \Sigma_t \phi(\mathbf{r}, E, t) &= \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \\ &+ \chi(E) \int_0^\infty dE' v \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \\ &+ S_{\text{ext}}(\mathbf{r}, E, t) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$\chi(E)$: 核分裂スペクトル

S_{ext} : 外部中性子源

中性子のエネルギーを離散化して、ある間隔ごとのエネルギー群としてあつかう。ここでは中性子のエネルギー範囲を G 個エネルギー群に分ける。

(1)式を g 群のエネルギー幅 $E_g < E < E_{g-1}$ で積分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \frac{1}{v} \phi - \nabla \cdot \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE D \nabla \phi + \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \Sigma_t \phi \\ = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) + \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE S \end{aligned} \quad \dots (2)$$

ここで、いくつかの形式的な定義を行う。

$$g \text{ 群の中性子束} \quad \phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad \dots (3)$$

$$g \text{ 群の全断面積} \quad \Sigma_{tg} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \Sigma_t(E) \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad \dots (4)$$

$$g \text{ 群の中性子の速さ} \quad \frac{1}{v_g} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad \dots (5)$$

散乱項と E' についての積分を離散化すると、

$$\begin{aligned}
& \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \\
&= \sum_{g'=1}^G \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \quad \dots (6)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 G は全エネルギー群数。

これより群移動断面積を次のように定義する。

$$\Sigma_{sg',g} \equiv \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \Sigma_S(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \quad \dots (7)$$

また、核分裂中性子源項を次のように書く。

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE S_f(\mathbf{r}, E, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \chi(E) \left[\sum_{g'=1}^G \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \right] \quad \dots (8)$$

となる。これより g' 群の核分裂断面積を次のように定義する。

$$\nu_{g'} \Sigma_{fg'} \equiv \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \quad \dots (9)$$

となる。また

$$\chi_g \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \chi(E) \quad \dots (10)$$

と定義する。

エネルギー依存のフィックの法則

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = -D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) \quad \dots (11)$$

が成り立つと仮定するならば、 g 群の中性子流は(11)式を g 群で積分することで得られる。
すなわち

$$\mathbf{J}_g(\mathbf{r}) = -D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) \quad \dots (12)$$

ここで、 D_g は次式で定義される。

$$D_g \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E)}{\nabla \phi_g(\mathbf{r})} \quad \dots (13)$$

これらの定義を用いて(1)式を書き換えると多群拡散方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{tg} \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg',g} \phi_{g'} + \chi_g \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_g \end{aligned} \quad \dots (14)$$

ここで、 v_g , D_g , Σ_{tg} , $\Sigma_{sg',g}$, χ_g , $v_{g'}$, $\Sigma_{fg'}$, S_g を群定数と呼ぶ。

6.2 2群拡散理論

高速中性子を第1群（高速群）、熱中性子を第2群（熱群）としてあつかう。

熱群の上限は、熱群から高速群への上方散乱（散乱による中性子のエネルギーの増加）が無視できるような十分高いところを選ぶ。（通常 $\sim 1\text{eV}$ ）

各群の中性子束

$$\text{高速群} \quad \phi_1(\mathbf{r}, t) = \int_{E_1}^{E_0} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \equiv \text{高速中性子束} \quad \dots (15)$$

$$\text{熱群} \quad \phi_2(\mathbf{r}, t) = \int_{E_2}^{E_1} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \equiv \text{熱中性子束}$$

E_0 : 高速群の上限（ $10 \sim 20\text{MeV}$ ）

E_1 : 高速群と熱群の境界（ $\sim 1\text{eV}$ ）

E_2 : 熱群の下限（ $\sim 0\text{eV}$ ）

核分裂中性子はすべて高速群で生まれるため

$$\chi_1 = \int_{E_1}^{E_0} dE \chi(E) = 1, \quad \chi_2 = \int_{E_2}^{E_1} dE \chi(E) = 0 \quad \dots (16)$$

$\chi(E)$: 核分裂スペクトル

よって核分裂による中性子源 S_{f1} , S_{f2} は、

$$\begin{aligned} S_{f1} &= v_1 \Sigma_{f1} \phi_1 + v_2 \Sigma_{f2} \phi_2 \quad (\text{高速群}) \\ S_{f2} &= 0 \quad (\text{熱群}) \end{aligned} \quad \dots (17)$$

ここで、除去断面積 Σ_{Rg} を次のように定義する。

$$\Sigma_{Rg} \equiv \Sigma_{tg} - \Sigma_{sg,g} \quad \dots (18)$$

熱群からの上方散乱は存在しないため、

$$\int_{E_2}^{E_1} dE \Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E'), \quad E_2 \leq E' \leq E_1 \quad \dots (19)$$

よって

$$\begin{aligned} \Sigma_{s2,2} &= \frac{1}{\Phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE \int_{E_2}^{E_1} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') \\ &= \frac{1}{\Phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE' \Sigma_s(E') \phi(\mathbf{r}, E') = \Sigma_{s2} \end{aligned} \quad \dots (20)$$

従って熱群に対する除去断面積 Σ_{R2} は

$$\Sigma_{R2} = \Sigma_{t2} - \Sigma_{s22} = \Sigma_{t2} - \Sigma_{s2} = \Sigma_{a2} \quad \dots (21)$$

他の群定数は前節で定義した通り。群定数は、対象となる群に対する詳細スペクトル計算を行い、断面積データをこのスペクトルで平均することで得られる。((3)式～(13)式参照)

以上の群定数を用いると臨界原子炉の2群拡散方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} -\nabla D_1 \nabla \phi_1 + \Sigma_{R1} \phi_1 &= \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2 \\ -\nabla D_2 \nabla \phi_2 + \Sigma_{a2} \phi_2 &= \Sigma_{s12} \phi_1 \end{aligned} \quad \dots (22)$$

6.3 修正1群拡散理論

熱中性子のもれが無視できる場合

すなわち

$$\frac{-D_2 \nabla^2 \phi_2}{\Sigma_{a2} \phi_2} = \frac{D_2 B^2}{\Sigma_{a2}} = L_2^2 B^2 \ll 1 \quad \dots (23)$$

の場合（例，大型軽水炉）

(22)式より

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{\Sigma_{s12}}{\Sigma_{a2}} \phi_1(\mathbf{r}) \quad \dots (24)$$

よって次式が得られる。

（修正1群モデル）