

曲面上の曲線の管状近傍

$\Sigma = \Sigma_{g,r}$ を種数 g , 境界成分 r の連結なコンパクト有向曲面とし, C^∞ 埋め込み $\gamma : S^1 \rightarrow \text{Int } \Sigma$ の像であるような単純閉曲線 $c = \gamma(S^1)$ を考える.

向きを保つ C^∞ 埋め込み $\tilde{\gamma} : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \text{Int } \Sigma$ であって, $\tilde{\gamma}(x, 0) = \gamma(x)$ ($x \in S^1$) をみたすものを c の**管状近傍** (tubular neighborhood) と呼んだ. (ただし, $S^1 \times [-1, 1]$ には S^1 と $[-1, 1]$ の標準的な向きから $[-1, 1] \times S^1$ に自然に定まる向きを入れる.)

定理 4.3 1) Σ 上の任意の単純閉曲線 c に対し, c の管状近傍が存在する.
2) c の任意の 2 つの管状近傍 $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \text{Int } \Sigma$ は次の意味で同値である: Σ に関する全域アイソトピー $F : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R}$ であって, $f_t|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ ($t \in \mathbb{R}$) かつ $\tilde{\gamma}' = f_1 \circ \tilde{\gamma}$ をみたすものが存在する. (ただし, $f_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ は $f_t(x) := F(x, t)$ ($x \in \Sigma, t \in \mathbb{R}$) によって定まる C^∞ 微分同相である.)

講義での管状近傍の定義は 2 次元の特殊性に基づいた定義であって, 本来の管状近傍の定義ではない. 一般的な管状近傍の定義は次のように述べられる. 用語の定義などは [田村 1] §2.2 などに譲る.

定義 A.1 Σ の接ベクトル束 $T\Sigma \rightarrow \Sigma$ の γ による引き戻し $\gamma^*(T\Sigma) \rightarrow S^1$ は, S^1 の接ベクトル束 TS^1 を部分ベクトル束として含んでいる. 従って, 商ベクトル束 $\gamma^*(T\Sigma)/TS^1 \rightarrow S^1$ を考えることができる. これを C^∞ 埋め込み γ の**法ベクトル束** (normal vector bundle) といい, $\nu(\Sigma/c) \rightarrow S^1$ と書く. $\nu(\Sigma/c)$ に Riemann 計量を入れて, 長さが 1 以下のベクトルからなる単位円板束 $N(\nu(\Sigma/c)) \rightarrow S^1$ を考える. これは零切断として S^1 を含んでいる. 単純閉曲線 c の**管状近傍**とは, C^∞ 埋め込み $g : N(\nu(\Sigma/c)) \rightarrow \text{Int } \Sigma$ であって, $g(x, 0) = \gamma(x)$ ($x \in S^1$) をみたすものをいう.

[田村 1] にある管状近傍の存在と一意性から, 定理 4.3 を導いてみよう.

証明 定義 A.1 の意味の c の管状近傍の存在は [田村 1] 定理 2.12 から従う. また, 定義 A.1 の意味の c の管状近傍の一意性は [田村 1] 定理 3.6 からわかる. ただし, c の 2 つの管状近傍が同値であることの正確な定義は [田村 1] §3.2 の冒頭にある. (要約すると, Σ に関する全域アイソトピーで一方を他方に重ね合わせ, その違いが $\nu(\Sigma/c)$ の自己束同型であるようにできるとき, 2 つの管状近傍は同値であるという.)

さて, 以下に示す補題 A.2 から $\nu(\Sigma/c) \rightarrow S^1$ は S^1 上の自明な 1 次元実ベクトル束である. 従って, Riemann 計量を保つベクトル束の同型 $h : \nu(\Sigma/c) \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ が存在し, その制限は円板束の同型 $\bar{h} := h|_{N(\nu(\Sigma/c))} : N(\nu(\Sigma/c)) \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$ を導く. 定義 A.1 の意味の c の管状近傍 $g : N(\nu(\Sigma/c)) \rightarrow \text{Int } \Sigma$ に対し, $\tilde{\gamma} := g \circ \bar{h}^{-1}$ によって $\tilde{\gamma} : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \text{Int } \Sigma$ を定めれば, これは講義での c の管状近傍となる.

また, $S^1 \times \mathbb{R}$ の自己束同型はちょうど 2 つあるが, 全空間に与えられた向きを保つものはそのうちの 1 つのみ (恒等写像) である.

以上より, 定理の 1), 2) が従う. $\square$

あとは次を示せばよい.

補題 A.2 Σ 上の任意の単純閉曲線 c に対し, c を与える C^∞ 埋め込み $\gamma: S^1 \rightarrow \text{Int } \Sigma$ の法ベクトル束 $\nu(\Sigma/c) \rightarrow S^1$ は自明な 1 次元実ベクトル束である.

証明 まず準備を行う. S^1 上の実 1 次元ベクトル束の同型類の全体は, S^1 から無限 Grassmann 多様体 $G_1(\mathbb{R})$ への連続写像のホモトピー類の全体 $[S^1, G_1(\mathbb{R})]$ と 1 対 1 に対応する ([田村 1]§8.2). $G_1(\mathbb{R})$ は無限射影空間 $P^\infty(\mathbb{R})$ であったから, 各次元 $n = 0, 1, 2, \dots$ にそれぞれ 1 つの胞体をもつような標準的胞体分割が存在する ([服部 1] 例 3.16). S^1 と $S^1 \times I$ をそれぞれ 1, 2 次元の胞体複体とみると, 胞体近似定理 ([服部 1] 定理 4.8) より,

$$[S^1, G_1(\mathbb{R})] = [S^1, P^\infty(\mathbb{R})] \cong [S^1, P^2(\mathbb{R})] \cong \pi_1(P^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$$

が従う. つまり, S^1 上の 1 次元実ベクトル束は同型を除いて 2 つしかなく, 1 つは自明なベクトル束であり, もう 1 つは $S^1 = P^1(\mathbb{R})$ 上の標準直線束 γ_1^1 ([田村 1]§8.2) である. この 2 つが互いに同型でないことは, 第 1 Stiefel-Whitney 類 $w_1 \in H^1(S^1; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ の値が前者は 0, 後者は 1 であることからわかる ([田村 1]§9.2). また, 零切断と交わらない切断の存在・非存在からも従う.

補題 A.2 を背理法によって証明する. $\nu(\Sigma/c) \rightarrow S^1$ が非自明な 1 次元実ベクトル束であると仮定しよう. 上の考察と仮定より, 法ベクトル束 $\nu(\Sigma/c) \rightarrow S^1$ は $S^1 = P^1(\mathbb{R})$ 上の標準直線束 γ_1^1 に同型である. よって, Σ の接ベクトル束 $T\Sigma$ の γ による引き戻し $\gamma^*(T\Sigma)$ は

$$\gamma^*(T\Sigma) \cong TS^1 \oplus \nu(\Sigma/c) \cong TS^1 \oplus \gamma_1^1$$

と表すことができる ([田村 1]§2.2). 特に TS^1 が S^1 上の自明なベクトル束であるから, $\gamma^*(T\Sigma)$ の第 1 Stiefel-Whitney 類は

$$w_1(\gamma^*(T\Sigma)) = w_1(TS^1 \oplus \gamma_1^1) = w_1(TS^1) + w_1(\gamma_1^1) = 0 + 1 = 1$$

と計算される ([田村 1]§9.2). 一方, Σ は C^∞ 多様体として向きづけ可能であるから, $T\Sigma$ はベクトル束として向きづけ可能であり, $w_1(T\Sigma) = 0$ である ([田村 1] 定理 9.23). 従って,

$$w_1(\gamma^*(T\Sigma)) = \gamma^*(w_1(T\Sigma)) = \gamma^*(0) = 0$$

となる. これは明らかに矛盾である. $\square$

注意 M, N が向きづけ可能な C^∞ 多様体, $f: M \rightarrow N$ が C^∞ 埋め込みであるとき, f の法ベクトル束は必ずしも自明ではない.