平成 27 年度　数学専攻専門科目「幾何学特論第一」

多様体の境界について

補題 1.3　ある $\alpha \in A$ に対し $p \in U_\alpha$ かつ $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ならば, $p \in U_\beta$ であるような任意の $\beta \in A$ に対し $\varphi_\beta(p) \in \mathbb{R}^{n-1}$ である.

証明　$p \in U_\alpha \cap U_\beta$ であるような $\alpha, \beta \in A$ に対して, $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^{n-1}$ かつ $\varphi_\beta(p) \in \mathrm{Int}\ \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^n_+ - \mathbb{R}^{n-1}$ となったと仮定しよう. (以下, $D_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $D_\beta := \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ とおく.)

(1.2) より, $\varphi_\alpha(p)$ の $\mathbb{R}^n$ における開近傍 W_α (ただし, $W_\alpha \cap \mathbb{R}^n_+ \subset D_\alpha$) と C^∞ 級写像 $\psi : W_\alpha \to \mathbb{R}^n$ が存在し,

$$(\star) \qquad \psi|_{D_\alpha \cap W_\alpha} = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})|_{D_\alpha \cap W_\alpha}$$

をみたす. 特に ψ は C^1 級であるので, 点 $\varphi_\alpha(p)$ における Jacobi 行列 $J(\psi)(\varphi_\alpha(p))$ は ψ の取り方にはよらない. また $\varphi_\beta(p) \in \mathrm{Int}\ \mathbb{R}^n_+$ なので, $J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p))$ を考えることができる. これらの Jacobi 行列に関して

$$J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p)) \cdot J(\psi)(\varphi_\alpha(p)) = J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \psi)(\varphi_\alpha(p)) = J(\mathrm{id})(\varphi_\alpha(p)) = E$$

となることが $(\star)$ からわかるので, $J(\psi)(\varphi_\alpha(p))$ は正則である.

すると, 逆関数定理より $\varphi_\alpha(p)$ の $\mathbb{R}^n$ における開近傍 W (ただし, $W \subset W_\alpha$) と $\varphi_\beta(p)$ の $\mathbb{R}^n$ における開近傍 W' (ただし, $W' \subset D_\beta \cap \mathrm{Int}\ \mathbb{R}^n_+$) が存在して, $\psi : W \to W'$ が C^∞ 級微分同相写像となる. また, 多様体の定義から $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{D_\beta} : D_\beta \to D_\alpha$ は同相写像であるから, $W'' := (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(W') \subset D_\alpha$ とおくと $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{W'} : W' \to W''$ も同相写像である. 写像の合成

$$\rho := (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{W'} \circ \psi : W \to W' \to W''$$

を考えれば, これも同相写像である.

さて $\varphi_\alpha(p) \in W \cap \mathbb{R}^{n-1}$ なので, $\varphi_\alpha(p)$ に収束する $W - D_\alpha$ の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が存在する. ρ が同相写像であるから, $\{\rho(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $\rho(\varphi_\alpha(p)) = \varphi_\alpha(p)$ に収束する W'' の点列である. 一方, $(\star)$ より $\rho|_{D_\alpha \cap W} = \mathrm{id}_{D_\alpha \cap W}$ であるから, $\{\rho(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $W'' - (D_\alpha \cap W)$ の点列でなければならない. $D_\alpha \cap W$ は D_α における $\varphi_\alpha(p)$ の開近傍であるから, $\{\rho(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $\varphi_\alpha(p)$ には収束しない. これは矛盾である. 以上で補題が証明された. □