# 第15講の問題の解答

15_04375 川口敦広

8月2日

## 1 $(s_A, s_b) = (0, 1)$ が相互作用 $(U_A(s), U_B(s))$ に関して唯一パレート効率的であることの証明

### 1.1 $(s_A, s_B) = (0, 1)$ のみが唯一パレート効率的となり得ることの証明

$(s_A, s_B) = (a, b)$ とおくと，

$$U_A(s) = \frac{1}{1-\lambda_A\lambda_B}(u_A(s) + \lambda_A u_B(s)) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}(a + \frac{1}{2}\cdot 4b) = \frac{4}{3}(a+2b)$$

$$U_B(s) = \frac{1}{1-\lambda_A\lambda_B}(u_B(s) + \lambda_B u_A(s)) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}(4b + \frac{1}{2}a) = \frac{4}{3}(4b + \frac{1}{2}a)$$

となる．

まず，$s_A + s_B < 1$ とする．このとき，$(0 \leq a, b < 1, 0 \leq a + b < 1)$ であり，$b^* = 1 - a$ とすると，$b^* > b$,$U_A(s), U_B(s)$ は $b$ について単調増加より，

$(s_A, s_B) = (a, b)$ $(a+b < 1)$ は $(s_A, s_B) = (a, 1-a)$ $(0 \leq a < 1)$ にパレート支配されている．$\cdots(1)$

よって，$(s_A, s_B) = (a, 1-a)$ $(0 \leq a \leq 1)$ のみがパレート効率的となり得る．

$b = 1 - a$ を $U_A(s), U_B(s)$ に代入すると，

$$U_A(s) = \frac{4}{3}(1-a),\ U_B(s) = \frac{4}{3}(4 - \frac{7}{2}a)$$

よって，$U_A(s)$, $U_B(s)$ は $a$ について単調減少であるから，

$(s_A, s_B) = (a, 1-a)$ $(0 < a \leq 1)$ は $(s_A, s_B) = (0, 1)$ にパレート支配されている．$\cdots(2)$

したがって，$(s_A, s_B) = (0, 1)$ のみがパレート効率的となり得る．

### 1.2 $(s_A, s_B) = (0, 1)$ がパレート効率的であることの証明

(1),(2) より，$(s_A, s_B) = (0, 1)$ は $(s_A, s_B) = (a, b)$ $(0 \leq a + b \leq 1, (a, b) \neq (0, 1))$ をパレート支配支配する．したがって，$(s_A, s_B) = (0, 1)$ はパレート効率的である．

### 1.3 結論

節 1.1,1.2 より，$(s_A, s_b) = (0, 1)$ が相互作用 $(U_A(s), U_B(s))$ に関して唯一パレート効率的であることが示された．

## 2　利得の数値や思いやり指数 $\lambda$ の設定の仕方によっては、「相手に思いやりがない」とする仮説が反証されうることの確認

まず,「相手には思いやりがない」とする仮説が実証されるプロセスを 1 の立場で確認する．
初めに，2 の支配戦略を考えると，D である．$\cdots(1)$
次に，2 が D をとったときの自分の最適応答をとると，D である．$\cdots(2)$
最後に，2 も以上のように考えるから，実際に D をとり，仮説が実証される．
ここで，ゲームの性質上 [1]，(1) が覆されることはありえない．よって，(2) において，2 が D をとったときの最適応答が C になれば，上記のプロセスは 2 の立場でも同様であるから，2 の仮説が反証される．
このときの思いやりを考えないときの利得双行列を

$$A = \begin{bmatrix} a,a & b,c \\ c,b & d,d \end{bmatrix}$$

とおく．ゲームの性質より，$c > a > d > b$ である．
1 の思いやりパラメータを $\lambda_1$, 相手が思いやりが無いと誤解している 1 から見た利得双行列を,$G^1$ とすると，

$$G^1 = \begin{bmatrix} (1+\lambda_1)a,a & b+\lambda_1 c,c \\ c+\lambda_1 b,b & (1+\lambda_1)d,d \end{bmatrix}$$

よって，2 が D をとったときの 1 の最適応答が C となるのは，

$$b + \lambda_1 c > (1+\lambda_1)d$$

これと $c > a > d > b$ をみたす数として，

$$a = 6,\ b = 0,\ c = 9,\ d = 3,\ \lambda_1 = \frac{2}{3}$$

を考える．このとき，

$$A = \begin{bmatrix} 6,6 & 0,9 \\ 9,0 & 3,3 \end{bmatrix}$$

$$G^1 = \begin{bmatrix} 10,6 & 6,9 \\ 9,0 & 5,3 \end{bmatrix}$$

となるから，2 が支配戦略である D をとったときに，1 が最適応答として C をとる利得の数値及び思いやり指数 $\lambda_1$ の存在が確認された．
ここで，2 の思いやりパラメータを $\lambda_2$，相手が思いやりが無いと誤解している 2 から見た利得双行列を $G^2$ とすると，

$$G^2 = \begin{bmatrix} (1+\lambda_2)6,6 & 9\lambda_2,9 \\ 9,0 & (1+\lambda_2)3,3 \end{bmatrix}$$

このとき，2 から見たとき，1 の支配戦略は D であるが，上記で述べた通り，実際には 1 は C をとる．このことは 2 の仮説が反証されたことを意味する．
よって，命題は示された．

[1] このゲームを囚人のジレンマゲームのようなものと捉え（ゲームを繰り返す点で異なるが），プレイヤーが得る利得が（自分のみが裏切った場合）>（自分も相方の黙秘した場合）>（自分も相手も裏切った場合）>（相手のみが裏切った場合）となることを前提とした．このとき，裏切ることが支配戦略である．