公理論的交渉理論
Axiomatic Bargaining Theory
– 合理的選択 Lecture 12 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

July 6, 2015

合意の設計

- チープトークにおけるプレー前コミュニケーションや、シグナリングにおけるシグナルはすべてコミュニケーションでの発言内容それ自体に物理的拘束力はなかった。
- 他方、社会では、契約 contract のように、一旦これをサインすると、それを守ることに拘束力がある合意がある。

大きなゲームでは、一般に Pareto 効率的な効用の組がたくさんあり、どれを選ぶべきか難しいため、合意内容の決め方自体が理論的テーマになる。

社会的合意に関する規範論

シグナリングのところで議論した次善に対して、
実現可能性については別のプロセスで担保し、
合意内容の社会的な最善を求めるアプローチを
経済学の分野では規範論 normative theory といったり、
ゲーム理論では協力ゲーム cooperative game といったりする。

規範論的な社会状態の選択にまつわる理論

- 社会的選択理論 social choice theory
- 公理的交渉理論 axiomatic bargaining theory
- 提携ゲーム coalitional game

交渉ゲーム Bargaining Games and 解 Solutions

Definition (交渉問題 Bargaining problem)

交渉問題とは $(S, d) \in \Sigma$ の組：

- $S \subset \Re^N$ 効用可能集合 utility possibility set (UPS).
- $d \in S$ 決裂点 disagreement point.

ほぼ一般的に以下の３条件を仮定する：

S のコンパクト性 Compactness、凸性 Convexity

包括性 Comprehensiveness $\forall x \in S, \forall y \in \Re^N_+, y \leq x \Rightarrow y \in S$

強個人合理性 Strong individual rationality $\exists x \in S, x \gg d$

以下、簡単のため、ほぼ一般性を失うことなく、

- $d = 0$ とし、(S, d) を S で表し、
- $\forall x \in S, x \geq d$ とする。

交渉問題の例 – パイの配分

Example (パイの配分)

二人のプレーヤー $\{1,2\}$ によるパイの分配を考える。

- プレーヤー i が受け取るパイの配分の割合を $x_i \in [0,1]$
- プレーヤー i の配分 x_i による（限界効用が逓減する）基数効用を

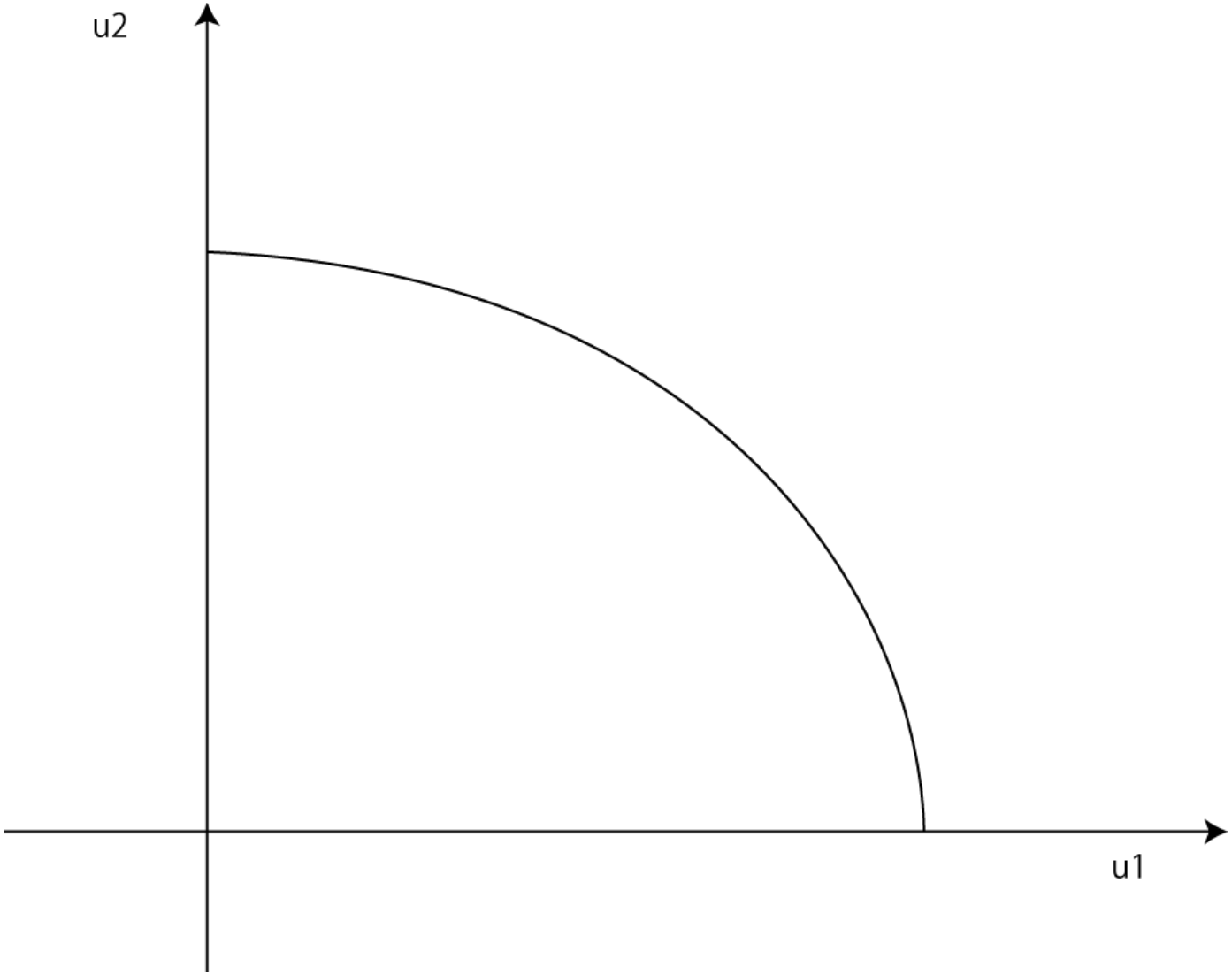
$$u_i(x_i) = \alpha_i \sqrt{x_i}$$

ただし、$\alpha_i > 0$ は、プレーヤー i のケーキの好みを表す係数

とすると、交渉問題 (S,d) は、$d = (0,0)$

$$S = \{(u_1,u_2) \in \Re^2_+ \mid \frac{u_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{u_2^2}{\alpha_2^2} \leq 1\}$$

となり、標準的な交渉問題の性質を満たす。


u2
u1

解 Solution

Definition (解 Solution)

(交渉) 解とは、交渉問題 $\forall S \in \Sigma$, に UPS 上の配分 $\varphi(S) \in S$ を対応づける関数 $\varphi : \Sigma \to \Re^N$

通常、個別の交渉解の公理系によらず以下の条件が仮定される。

交渉解が満たすと通常仮定される条件

$\forall S \in \Sigma$

(弱) パレート効率性 Pareto efficiency $\neg \exists x \in S, x \gg \varphi(S)$

(一次) 同次性 Homogeneity $\forall c > 0, \varphi(c\ S) = c\ \varphi(S)$

ただし、$c\ S := \{c\ x | x \in S\}$

強個人合理性 Strong individual rationality $\varphi(S) \gg 0$

問題に関する単調性 Issue Monotonicity[2]

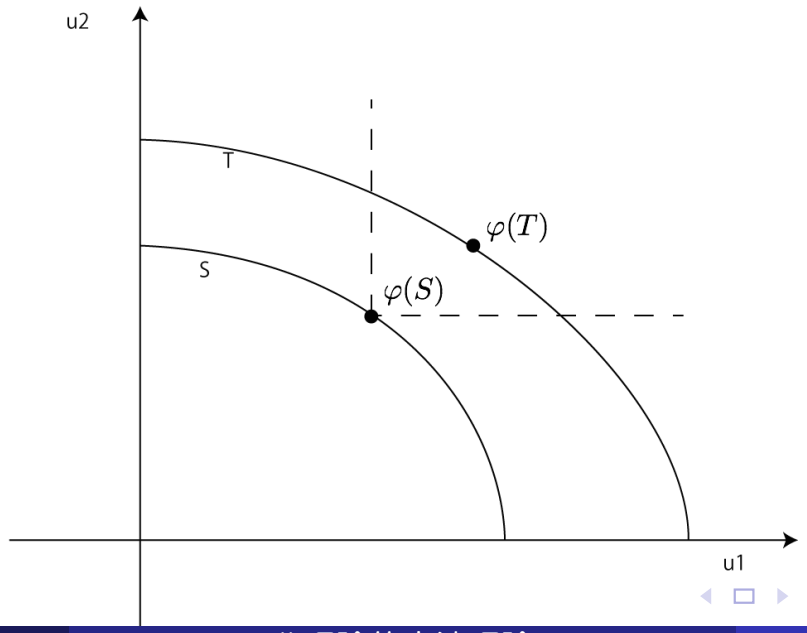
Definition (強単調性 Strong monotonicity)

交渉解 φ が強単調性を満たす iff $\forall S, T \in \Sigma$,

$$S \subset T \Rightarrow \varphi(S) \leq \varphi(T)$$

Strong monotonicity implies that
if additional options were made available to the individuals in a given situation

then no one of them should lose utility because of the availability of these new options.



分解可能性 Decomposability

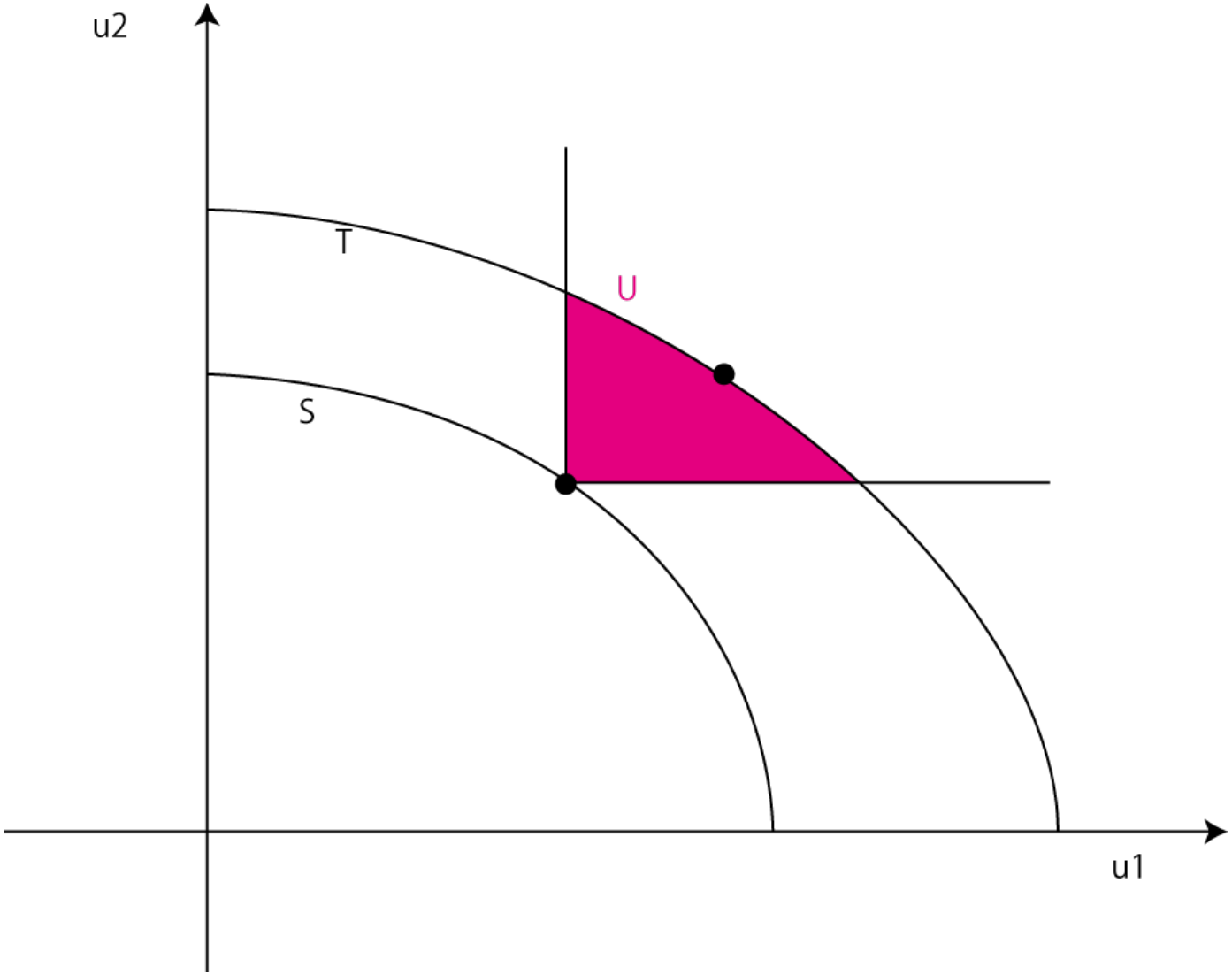
Definition (分解可能性 Decomposability (Step-by-Step Negotiations))

交渉解 φ が分解可能性を満たす iff, $\forall S, T \in \Sigma$, $S \subset T$ かつ $U := \{x \in \Re^N_+ |\ \varphi(S) + x \in T\} \in \Sigma$ ならば、

$$\varphi(T) = \varphi(S) + \varphi(U)$$

を満たすことである。

Decomposability restricts the set of solutions to ones which are invariant under decomposition of the bargaining process into stages.[2]


u2
T
U
S
u1

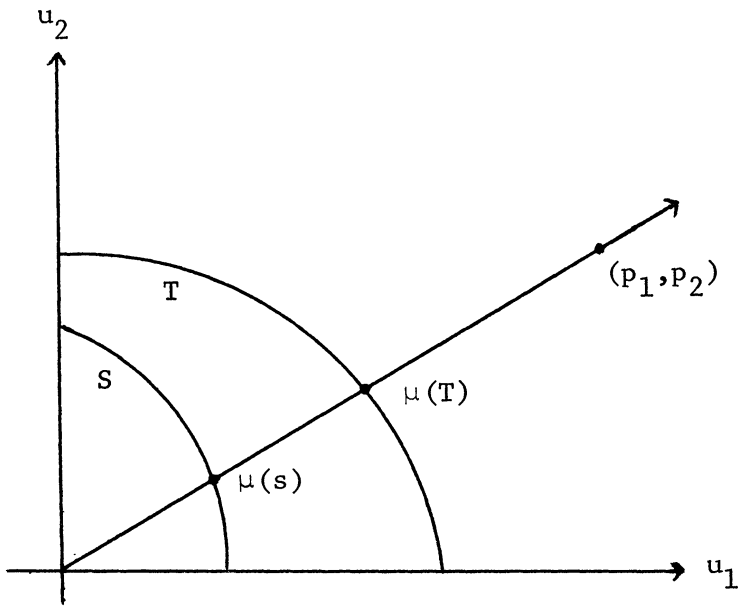
交渉解の例 – 均等解 egalitarian solution

Definition (一定比率分配 Proportional Solution)

解 φ が一定比率分配であるとは $\exists p \in R^N_{++}, \forall S \in \Sigma,$

$$\varphi(S) = \max\{\lambda \mid \lambda\, p \in S\}\, p$$

特に、$p = \frac{1}{n}(1, \ldots, 1)$ の時、均等解 egalitarian solution という。
この解を推進する立場を平等主義 egalitarianism という。



公理論的アプローチの定理の例 (Kalai[2])

Theorem

通常の条件を満たす交渉問題の族 Σ とその上の交渉解 φ について、以下の３条件は同値である：

- φ が一定比率分配である
- φ が強単調である
- φ が分解可能である

包括性を仮定しないと、一定比率分配がパレート効率的とは限らない [7]。

Proof.

φ が一定比率分配であるならば、強単調性と分解可能性を満たすことは明らか。そこで、

- φ が分解可能である $\Rightarrow$ φ が強単調である
- φ が強単調である $\Rightarrow$ φ が一定比率分配である

を示す。 □

分解可能性 $\Rightarrow$ 強単調性.

$S, T \in \Sigma$ について、$S \subset T$ とする。

$\varphi(S)$ が T の弱パレート効率的な元でない場合 コンパクト性などより、$U := \{x \in \Re^N_+ | \exists y \in \varphi(T)\} \in \Sigma$ を満たす。分解可能性の前提が満たされ、強単調性が示された。

$\varphi(S)$ が T の弱パレート効率的な元である場合 任意の実数 $\delta \in (0,1)$ に対して、$\delta S \subset T$ かつ、homogeneity （分解可能性からも示せる）より、$\varphi(\delta S) = \delta\varphi(S) \ll \varphi(S) \in T$ なので、$\varphi(\delta S)$ がパレート効率的でない場合に帰着する。δ は任意にとれるので、1 に近づければ $\varphi(S) \leq \varphi(T)$

□

強単調性 $\Rightarrow$ 一定比率分配.

基底に相当する場合の作成

単位ベクトル $p \in \Re^N_+$ に対して、$V_p \in \Sigma$ を $V_p := \{x \in \Re^N_+ | x \leq p\}$ とし、$\varphi(V_p) := p$ とする。

任意の $S \in \Sigma$ に対して $\lambda(S) := \max\{t | tp \in S\}$ とおく。

$\varphi(S) \geq \lambda(S)p$ の証明

comprehensiveness より、$\lambda(S)V_p \subset S$.

homogeneity より、$\varphi(\lambda(S)V_p) = \lambda(S)\varphi(V_p) = \lambda(S)p$

強単調性より、$\varphi(S) \geq \varphi(\lambda(S)V_p) = \lambda(S)p$

$\varphi(S) \leq \lambda(S)p$ の証明

強パレート $(\neg\exists y \in S, x < y)$ の定義より、$\lambda(S)p$ が S 上で強パレート効率的であれば、$\varphi(S) = \lambda(S)p$

$\lambda(S)p$ が S 上で強パレート効率的でない場合、任意の実数 $\delta > 1$ をとり、S と $\delta\lambda(S)p$ から生成される交渉問題を

$$S_\delta := \{x \in \Re^N_+ | \exists y \in \text{convex hull}(S \cup \{\delta(S)p\}), x \leq y\}$$

$\lambda(S_\delta) = \delta\lambda(S)$ であり、$\delta\lambda(S)p$ は S_δ 上で強パレート効率的だから $\varphi(S_\delta) = \delta\lambda(S)p$.

$S \subset S_\delta$ だから、強単調性より、$\varphi(S) \leq \delta\lambda(S)p$. δ を 1 に近づければ、$\varphi(S) \leq \lambda(S)p$ $\square$

別の交渉解の例

Definition (ナッシュ交渉解 Nash bargaining solution (NBS) [6, 5])

$\varphi(S, d)$ がナッシュ交渉解であるとは、

$$\max\{\ \Pi_{i \in N}(u_i - d_i) \mid u \in S\ \}$$

という最大化問題の唯一の解となることである。

特に、この交渉解の対数をとれば、各人の効用の和を最大化すること（功利主義的解 utilitarian solution）と同値。

別の公理論的アプローチの定理の例

Theorem ([6, 5])

以下の性質を満たす交渉解は唯一ナッシュ交渉解のみである。

- 効用のアフィン変換に関する不変性 (同次性の一般化)
- パレート効率性
- 対称性
- 無関係代替案からの独立性

理論的詳細は、Muthoo[3] 他、標準的なゲーム理論の教科書などを参照されたい。
Kalai[2] の解に関する前提との大きな違いは、アフィン変換に関する不変性。これが強単調性もしくは分解可能性と両立しない。

交渉解のメタ選択？– 平等主義 vs 功利主義

メタ交渉ゲーム meta bargaining game によって最適な交渉解を選択する（そして、選ばれる交渉解はナッシュ交渉解である！）とする議論もあるが、
文脈によって、どの交渉解が優れているかは異なるとするのがより自然に見える（[4] なども参照）。

Example (パイの分配)

- Q. プレーヤー１が２よりもケーキ A を好んでいる時、Kalai の解に従うと、どちらにより多くのケーキが分配されるだろうか？
- Q. 別のケーキ B については、好みが逆としよう。A, B の２つのケーキの分配から得られる効用を足し算した時、Nash と Kalai とで、どちらの方が効用が大きくなるか？

信頼の価値

Kalai の交渉の公理は、相手が信頼できないことを前提としている。
相手が信頼でき、関係が長期に渡ることが予期できる場合には、均等解よりは、功利主義的解の方が優れているようにみえる。

Nash Program

Example (最後通牒 Ultimatum)

- $N = \{1, 2\}$
- プレーヤー 1 が配分 $(u_1^*, u_2^*) \in \Re_+^2$ $s.t.$ $u_1^* + u_2^* \leq 100$ を提案
  プレーヤー 2 はこれを受け入れる accept か拒否する reject
- プレーヤー 2 が受け入れれば、$(u_1, u_2) = (u_1^*, u_2^*)$
  プレーヤー 2 が拒否すれば、$(u_1, u_2) = (0, 0)$

- 最後通牒の一般化の提案・再提案ゲーム [8] によってナッシュ交渉解を特徴づけることが可能 [1]。
- このように協力ゲームの解を非協力ゲームの解によってミクロ的に基礎づけ micro-foundation しようとする立場を Nash program という。

References

[1] Ken Binmore, Ariel Rubinstein, and Asher Wolinsky.
The nash bargaining solution in economic modelling.
The RAND Journal of Economics, 17(2):pp. 176–188, 1986.

[2] Ehud Kalai.
Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisons.
Econometrica, 45(7):1623–1630, 1977.

[3] Abhinay Muthoo.
Bargaining Theory with Applications.
Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[4] Roger B. Myerson.
Utilitarianism, egalitarianism, and the timing effect in social choice problems.
Econometrica, 49(4):883–897, 07 1981.

[5] John Nash.
The bargaining problem.
Econometrica, 18(2):155–162, April 1950.

[6] John Nash.
Two-person cooperative games.
Econometrica, 21(1):128–140, April 1953.

[7] A.E. Roth.
Proportional solutions to the bargaining problem.
Econometrica, 47(3):775–778, 1979.

[8] Ariel Rubinstein.
Perfect equilibrium in a bargaining model.
Econometrica, 50(1):97–110, 1982.