展開形 Extensive Form と標準形 Normal Form

– 合理的選択 Lecture 8 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

June 8, 2015

Outline

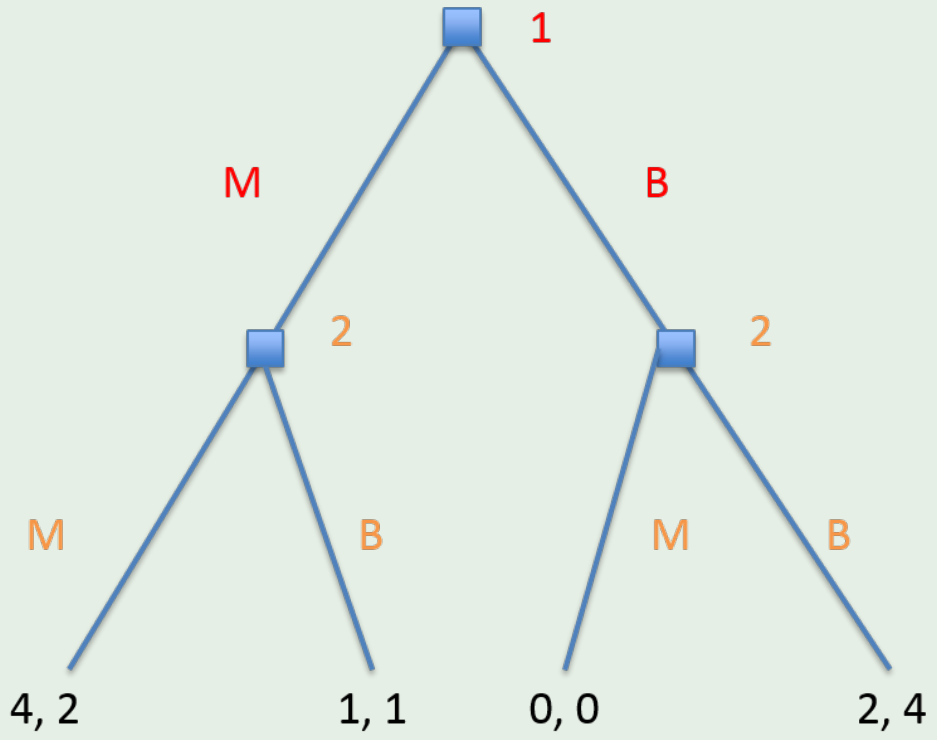
1. 展開形ゲームの標準形（戦略形）表現とナッシュ均衡
2. 完全情報ゲームの拡張と部分ゲーム完全均衡 SPNE
3. 前向き帰納法と弱支配される戦略の除去

Example (Battle of Sexes)

$N = \{1 \text{ (Woman)}, 2 \text{ (Man)}\}$

		2	
		Museum	Boxing
1	M	$4, 2$	$1, 1$
	B	$0, 0$	$2, 4$

Example (2 Stage Battle of Sexes)



$$H = \{\varnothing, M, B, MM, MB, BM, BB\}$$

復習 – 展開形ゲームの戦略

各プレーヤーについて、その全ての決定ノードにおける行動選択を列挙したものを戦略という。

Definition (戦略 Strategy)

プレーヤー i の戦略 s_i は $h \in P^{-1}[i]$ に対して、$s_i(h) \in A(h)$ を定める関数

Example (2 stage BoS)

各プレーヤーの戦略の集合は、

- $S_1 = A(\varnothing) = \{M, B\}$
- $S_2 = A(M) \times A(B) = \{M, B\} \times \{M, B\} = \{MM, MB, BM, BB\}$

復習 – 戦略の組の結果 Outcome

各戦略の組 $s = (s_i)_{i \in N} \in S$ に対して、始点ノードから、s に従ったプレーで逐次的にプレーの履歴を構成していって到達する終端ノードのことを s の結果という。

Definition (Outcome)

$\forall s \in S$, outcome $O(s) \in Z$ satisfies $\forall h < O(s)$ ($h \in H \setminus Z$ is a subsequence 部分列 of $O(s)$)

$$(h, s_{P(h)}(h)) \leq O(s)$$

Example (2 stage BoS)

$(s_1, s_2) = (B, MB)$ のとき、
$O(s_1, s_2) = (s_1(\varnothing), s_2((s_1(\varnothing))) = (B, s_2(B)) = BB \in Z$

展開形ゲームの標準形（戦略形）表現

Definition

完全情報ゲーム $\Gamma = \langle \mathcal{K}, N, P, u \rangle$ の標準形表現 $\langle N, S, U \rangle$:

- S_i は Γ におけるプレーヤー i の戦略の集合
- $\forall s \in S, U(s) := u(O(s))$

Example (2 stage BoS)

2 stage battle of sexes の標準形は

		2			
		MM	MB	BM	BB
1	M	4,2	4,2	1,1	1,1
	B	0,0	2,4	0,0	2,4

元の BoS と 2 stage BoS が異なる標準形ゲームであることに注意！

ナッシュ均衡

Definition (ナッシュ均衡)

完全情報ゲーム Γ の戦略の組 s がナッシュ均衡である iff
s が Γ の標準形表現のナッシュ均衡

Theorem

完全情報ゲームの後ろ向き帰納法の解はナッシュ均衡でもある。

Example (2 stage BoS)

後ろ向き帰納法の解 (M, MB)

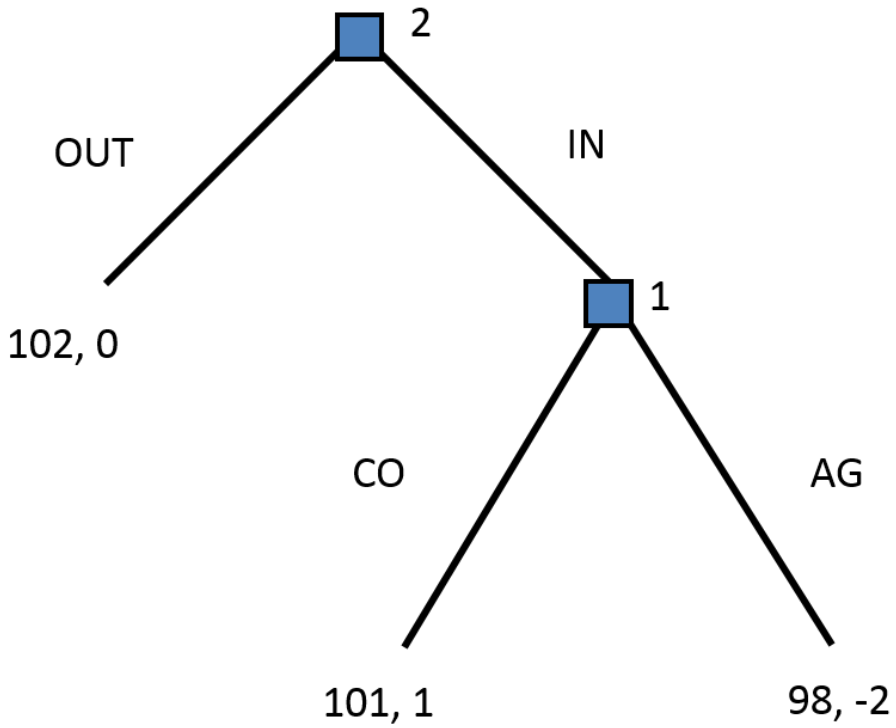
ナッシュ均衡 $(M, MB), (M, MM), (B, BB)$

後ろ向き帰納法の解でないナッシュ均衡については、その解釈がなかなか難しい。以下、有名なゲームを通じて、両者の関係性を探る。

Chain Store Game[3]

プレーヤー:

1. チェーン・ストア
2. 参入企業



標準形表現

		2	
		OUT	IN
1	CO	102, 0	101, 1
	AG	102, 0	98, -2

- 後ろ向き帰納法の解 (CO, IN)
- ナッシュ均衡 $(CO, IN), (AG, OUT)$

たくさん企業が参入してきても、唯一の後ろ向き帰納法の解は、すべての参入で (CO, IN)。

チェーン・ストア　パラドックス Chain Store Paradox

- チェーンストアゲームでの後ろ向き帰納法でないナッシュ均衡は、チェーンストアによる「参入してきたら価格競争 AG に巻き込むぞ」とする事前の脅しに参入企業が屈した格好と解釈できる。
- しかし、実際に参入企業が参入 IN すると、チェーンストアにとっては妥協する方が得。結局、チェーン・ストアは妥協の誘惑に勝てないだろうという考え方をするのが後ろ向き帰納法。
- 後ろ向き帰納法に矛盾するような脅しのことを信憑性のない脅し incredible threat という。
- 現実のチェーン・ストア寡占市場では、これにもかかわらず、脅しが機能し、しばしばチェーン・ストアの独占が達成されているようにも見える。この理論と現実の乖離をチェーン・ストア・パラドックスという [3]。

Outline

1. 展開形ゲームの標準形（戦略形）表現とナッシュ均衡
2. 完全情報ゲームの拡張と部分ゲーム完全均衡 SPNE
3. 前向き帰納法と弱支配される戦略の除去

外生的不確実性を含む拡張

Definition (外生的不確実性を含む完全情報ゲーム)

$\Gamma = \langle \mathcal{K}, N, P, f_c, u \rangle$:

- $P : H \setminus Z \to N \oplus \{c\}$
  c は不確実性 *chance* または自然 *nature* と呼ばれる,
- $\forall h \in P^{-1}[c], f_c(\cdot|h) \in \Delta(A(h))$
  $P^{-1}[c]$ 上の各確率分布 $f_c(\cdot|h)$ は互いに独立

後ろ向き帰納法

後ろ向き帰納法は、決定の木と同様に行う。

Definition (Backwards Induction with Chance Moves)

A backward induction solution $s^* \in S$ of a game tree $\Gamma = \langle \mathcal{K}, N, P, f_c, u \rangle$ is recursively defined by the following algorithm:

- Start from the terminal node. $\forall h \in Z$, $U(h) := u(h)$.
- $\forall h \in H \setminus A$, when U of all the direct successors are determined:
  - $\forall h \in P^{-1}[c]$, $U(h) := \sum_{\omega \in A(h)} f_c(\omega|h) U(h, \omega)$
  - $\forall h \in P^{-1}[N]$, $s^*_{P(h)}(h) \in \arg\max_{a \in A(h)} U_{P(h)}(h, a)$
    $U(h) := U(h, s^*_{P(h)}(h))$

同時決定を含む拡張 [2]

Definition (同時決定を含む完全情報ゲーム)

$\Gamma = \langle \mathcal{K}, N, P, u \rangle$:

- $P : H \setminus Z \to \mathcal{P}(N)$,
- $\forall h \in H \setminus Z, \exists \{A_i(h)\}_{i \in P(h)}, A(h) = \times_{i \in P(h)} A_i(h)$.

このようなゲームでは、履歴は各期のプレーの組の列になる。

Definition (戦略 Strategy)

同時決定を含む完全情報ゲーム $\Gamma = \langle \mathcal{K}, N, P, u \rangle$ におけるプレーヤー $i \in N$ の（純粋）戦略は、全ての $i \in P(h)$ を満たす終端でない履歴 $h \in H \setminus Z$ に $A_i(h)$ 上の行動を対応付ける関数。

部分ゲーム完全ナッシュ均衡

部分ゲーム完全ナッシュ均衡は完全情報ゲームにおける後ろ向き帰納法による解の拡張である。
各決定ノードでのプレーを効用最大化からナッシュ均衡戦略に置き換える。

Definition (Subgame-Perfect Nash Equilibrium (SPNE))

A subgame-perfect Nash equilibrium (SPNE) $s^* \in S$ of an extensive game with perfect information with simultaneous moves $\Gamma = \langle \mathcal{K}, N, P, u \rangle$ is obtained by the following algorithm:

- Start from the terminal node. $\forall z \in Z$, let $U(z) := u(z)$.
- $\forall h \in H \setminus Z$, when U of all the direct successors are determined, $\forall i \in P(h), s_i^*(h) \in \arg\max_{a_i \in A_i(h)} U_i(h, (a, (s_j^*(h))_{j \in P(h) \setminus \{i\}})$, $U(h) := U(h, (s_i^*(h))_{i \in P(h)})$.

同時決定を含む完全情報ゲームの例 – 繰り返しゲーム Repeated Game

同じゲーム $G = \langle N, A, u \rangle$ （これを成分ゲーム constituent game (stage game) という）のプレーを繰り返すゲーム。

- 繰り返しゲームでは、履歴は $h = (a^1, \ldots, a^t) \in A^t \subset H$ となる。a^t は t 期目の行動の組。 (a の t 乗でないことに注意！)
- 各期に得られる利得 u をなんらかの方法で集計した利得 U が繰り返しゲームの利得となる。T 回有限回繰り返しゲームで代表的な利得は、

$$U_i((a^t)_{t=1}^T) := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} u_i(a^t)$$

Outline

1. 展開形ゲームの標準形（戦略形）表現とナッシュ均衡
2. 完全情報ゲームの拡張と部分ゲーム完全均衡 SPNE
3. 前向き帰納法と弱支配される戦略の除去

弱支配 Weak Dominance

Definition (行動の弱支配)

標準形ゲーム $\langle N, A, u \rangle$ で、行動 $a_i \in A_i$ が $a'_i \in A_i$ を強支配する iff

- $\forall a_{-i} \in A_{-i}, \quad u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$ and
- $\exists a_{-i} \in A_{-i}, \quad u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$

Example (弱支配される戦略の除去の順序 [2])

	L	R
T	$1,1$	$0,0$
M	$1,1$	$2,1$
B	$0,0$	$2,1$

行動を除去する順序：

- $T \to L \Rightarrow (M, R)$
- $B \to R \Rightarrow (M, L)$

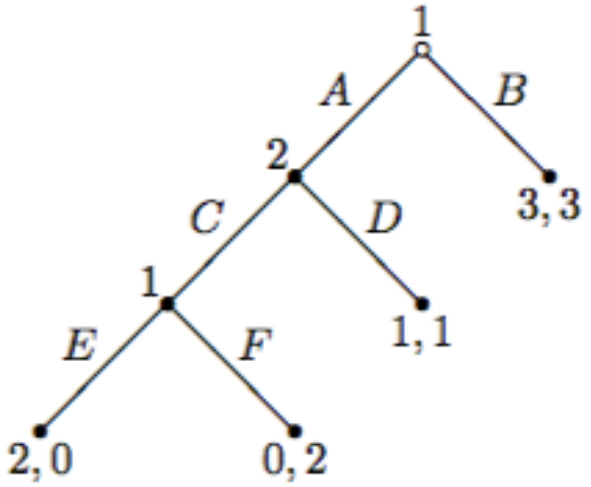
強支配と弱支配

強支配される行動の除去で残る行動の集合は除去の順序によらない。

弱支配される戦略の除去の順序と後ろ向き帰納法

除去する順序によっては、SPNE がすべて除去されてしまうこともあり得る。

Example ([2])



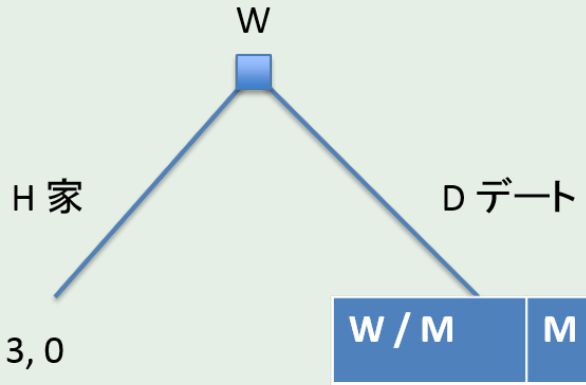
	C	D
AE	$2,0$	$1,1$
AF	$0,2$	$1,1$
BE	$3,3$	$3,3$
BF	$3,3$	$3,3$

後ろ向き帰納法 $AF \to C \to AE \Rightarrow (BE, D)$ or (BF, D)

それ以外の順序 $AE \to D \to AF \Rightarrow (BE, C)$ or (BF, C)

外部オプション

Example (Battle of Sexes with an outside option)



W / M	M	B
M	4, 2	1, 1
B	0, 0	2, 4

		M	
		M	B
W	HM	3,0	3,0
	HB	3,0	3,0
	DM	4,2	1,1
	DB	0,0	2,4

- デートの行き先の同時決定ゲーム Battle of Sexes に加えて、女性だけ「家にいる」という外部オプションを持つ。
- SPNE は、$(HB, B), (DM, M)$ の２つ。

前向き帰納法 Forward Induction[1]

Example (BoS with Outside Option)

- W の主張「デートで Boxing に行くくらいなら、家にいる」
  → W がデートに行くならば、W は断固 Museum を選ぶ！
  → W が Museum を選ぶなら仕方なく M は Museum を選ぶ
  → M が Museum を選ぶなら後ろ向き帰納法により、W は 1 段階目で D を選ぶ
- W の上記の主張は、標準形表現において弱支配される戦略の除去によって特徴付けられる。
  DB → B → HM, HB ⇒ (DM, M)
- W の主張に基けば、SPNE $(s_W, s_M) = (HB, B)$ が除去される。

上記の理屈付けは過去の決定が合理的であっただろうとの推測を含むことから前向き帰納法 forward induction と呼ばれる。

Burning Money

Example (Burning Money)

先の Battle of Sexes の効用の単位を円とする。プレー前に女性のみ「1円を捨てる」か「捨てない」の二つの選択肢を持つ２段階ゲーム。

Q. このゲームを定式化し、前向き帰納法を適用して残る SPNE を求めよ。
Ans. BoS となんら関係ない「お金を捨てる」というオプションを事前に持っているのみで得できる！

Q. ゲーム・モデルでどの範囲まで考えれば良いのか？
Q. 繰り返しゲームや前向き帰納法を踏まえて、改めて過去の持つ意味について考えてみよう。

精緻化基準 Refinement Criterion

後ろ向き帰納法や前向き帰納法のように、納得のいく基準を満たすナッシュ均衡のみを解とみなし、プレーの予測精度を高めようとする考え方を均衡の精緻化 refinement という。

- 精緻化基準は状況によらず普遍的に異論なく適用可能というわけではない。
- Q. 前向き帰納法の突っ込みどころを探してみよう！

References

[1] Elon Kohlberg and Jean-Francois Mertens.
On the strategic stability of equilibria.
Econometrica, 54(5):1003–1037, 1986.

[2] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein.
A Course in Game Theory.
MIT Press, Cambridge, 1994.

[3] Reinhard Selten.
The chain store paradox.
Theory and Decision, 9:127–159, 1978.
10.1007/BF00131770.