First Price Auction と Second Price Auction についての考察

所属 5 類

学籍番号 15_12475

名前 福成理紀

提出日 2015 年 6 月 8 日

1 オークションとは

オークションとは、個人間で物品を売買する際に使われるポピュラーな手段だ。現代で人気なネットオークションサイトにはヤフオクが挙げられる。ヤフオクでは物品の現在価格に対してそれより大きな額で入札をしていき、時間が終了すると最終的に最大額で入札した入札者が落札をし、出品者と直接取引を行う、ということになる。

これは公開入札方式の English Auction と呼ばれる。公開入札方式とは入札額が入札するたびに公表される方式であり、そのうちの English Auction というのは入札によって徐々に値段が釣り上げられる方式のことである。公開入札方式には Dutch Auction というものもあり、これは出品者が入札額を徐々に下げていき、入札者が入札したい額が来た時に入札をし、取引をするというものである。

今回扱う First Price Auction と Second Price Auction は公開入札方式に対して封印入札方式と呼ばれる。これは入札額が入札によって公表されないものであり、すべての入札を集計し、その中で入札額を比較して落札者を決定する。First Price Auction では入札額が最高の入札者がその入札額で落札、Second Price Auction では入札額が最高の入札者が 2 番目に高い入札額で落札、となる。

ヤフオクは English Auction であると書いたが、ヤフオクには自動入札というシステムがあり、これは自動入札における最高入札額を設定して入札を行うことで、最高入札額以下の他の入札に対応して入札を行うというものだ。全員が自動入札による入札を行った時、最終的な落札額は 2 番目に高い最高入札額を設定した人の入札に対する自動入札の額になるため、ヤフオクは Second Price Auction であるとも言える。

今回は封印入札方式である First Price Auction と Second Price Auction、この 2 つの方式についてゲーム理論を適用し考察、議論を展開したい。

2 FIRST PRICE AUCTION

まず First Price Auction を考える。

その前に、オークションにおける利得について考えたいと思う。オークションでは入札者が物品に対して「これくらいの価値がある」という評価額をつける。これは入札額とは別の値である。この時、落札した時の利得は(評価額)-(落札額)と書くことができる。落札できなかった場合の利得は 0 である。

さて、First Price Auction では、落札した場合の落札額は落札者の入札額になるため、落札した時の利得は(評価額)-(入札額)である。このことから「入札者は評価額以上の額で入札をしない」事がわかる。これは、落札できなかった場合の利得が 0 であり、また評価額以上の入札額を設定した場合落札時の利得が負の値を取ることから、合理的な選択を考えることで導かれる。また、このことから「他の入札者のどの評価額よりも大きい額で入札をすれば、必ず落札できる」こともわかる。

よって、First Price Auction で利得を大きくするためには、評価額より小さい範囲で入札額を小さくしつつ、他の入札者に勝つことが必要となる。しかし、入札額を小さくすれば利得は増えるが他の入札者に負ける可能性が高くなり、入札額を大きくすれば他の入札者に勝つ可能性は高くなるが利得が減るというトレードオフのため、支配戦略は存在しない。

ここで、オークションについて、自分が落札するかしないかは、他の入札者の内最大の入札額を入札してくる人のみに依存する。そのため 2 人ゲームと考えることが可能である。2 人の入札者を X,Y と置く。それぞれ利得を$\mathrm{u_X}, u_Y$、入札額を$\mathrm{P_X}, P_Y$、評価額を$\mathrm{V_X}, V_Y$とする。

お互いに相手の入札額及び評価額を知ることができないため、相手の評価額が$\left[0, \mathrm{V_{max}}\right]$の範囲で等確率に分布していると仮定する。ここで$\mathrm{V_{max}}$とは入札者のどの評価額よりも大きい値、ここでは$\mathrm{V_{max}} \geq \mathrm{V_X}, V_{max} \geq V_Y$となる値のことである。この仮定は、現実においては「プレミア等のない中古品のオークションで、新品より価値が下がっているために新品より高い評価額は付けられない」という状況に相当する。

Xの入札について考える。相手の入札額を$\mathrm{P_Y} = kV_Y\ (0 \leq \mathrm{k} \leq 1)$とする。このオークションで勝つためには$\mathrm{P_X} > P_Y$が必要であるため、

$$\mathrm{P_X} > \mathrm{kV_Y}$$

$$\frac{\mathrm{P_X}}{\mathrm{k}} > \mathrm{V_Y}$$

が条件である。ここでV_Yが$\left[0, V_{max}\right]$の範囲で等確率に分布しているという仮定から、この条件が成り立つ確率、すなわちオークションで勝てる確率は$\frac{P_X}{kV_{max}}$となる。

よって利得の期待値は

$$\left(V_X - P_X\right) \times \frac{P_X}{kV_{max}} + 0 \times (1 - \frac{P_X}{kV_{max}})$$

$$-\frac{1}{kV_{max}}\left(P_X - \frac{V_X}{2}\right)^2 + \frac{V_X^2}{4kV_{max}}$$

となり、期待値が最大になるのは入札額P_Xが評価額の半分$\frac{V_X}{2}$に等しい時である。

この議論は入札者Yに適用しても同じ結果が得られる。つまり、評価額が等確率で分布しているという仮定のもとでは、入札者は評価額の半分の値で入札することで期待値を最大化することができる。

3 SECOND PRICE AUCTION

次に Second Price Auciton を考える。Second Price Auction では落札額は落札者の入札額ではなく、2 番目に大きい入札額になる。First Price Auction で使ったものと同じ記号を利用すると、Xについての利得は

$$u_X = \begin{cases} V_X - P_Y \text{ (落札成功)} \\ 0 \text{ (落札失敗)} \end{cases}$$

となる。これにより、「Second Price Auction では自分の入札額と利得の値に関係はない」ということがわかる。つまり、今度は First Price Auction とは違って、自分の入札額を調整することで利得を最大化するという操作ができないことになる。

では、入札者Xについて考えた時、評価額のとおりに入札する場合と、それより大きい額で入札する場合、それより小さい値で入札する場合、という 3 つの選択肢を考える。この時、相手の入札者Yの取りうる入札額の範囲は 4 つあり、これを利得行列として以下に表す。

	$P_Y < V_X - \alpha$	$V_X - \alpha < P_Y < V_X$	$V_X < P_Y < V_X + \beta$	$V_X + \beta < P_Y$
$P_X = V_X - \alpha$	$V_X - P_Y$	0	0	0
$P_X = V_X$	$V_X - P_Y$	$V_X - P_Y$	0	0
$P_X = V_X + \beta$	$V_X - P_Y$	$V_X - P_Y$	$V_X - P_Y < 0$	0

ここで、$0 < \alpha < V_X$、$0 < \beta$という記号を導入した。一番下の行、右から二列目のマスに注意して見てもらいたいが、この利得行列において$P_X = V_X$という選択肢は他の選択肢を弱支配している。よって Second Price Auction では自分の評価額のとおりに入札するのが合理的な選択であるといえる。

4 収入同値定理

神山(2015)によれば「収入同値定理とは，競り下げ方式（第一価格方式）と競り上げ方式（第二価格方式）のどのオークション方法を採用したとしてもオークション主催者の期待収入が同一になるとのもので，主催者の期待収入はオークション方法に依らずに一定であるとの定理である」とされており、つまり First Price Auction と Second Price Auction で得られる出品者の利得期待値が等しいことを表す定理である。今回、First Price Auction にて入札者の評価額が$\left[0, V_{max}\right]$に等確率で分布すると仮定したため、この仮定のもとで出品者の利得期待値についてこの定理が成り立つことを証明する。

まず First Price Auction について考える。入札者は評価額の半分の値を入札するため、入札額は$\left[0, \frac{V_{max}}{2}\right]$に等確率で分布する。この範囲での確率密度関数は$f(x) = \frac{2}{V_{max}}$となる。これを積分すると累積分布関数が得られ、その値は$F(x) = \frac{2}{V_{max}}x$である。

落札額がある値x以下になる確率の累積分布は、落札額が入札額の最大値であることから、入札額P_X, P_Yがともにx以下になる時の累積分布に等しく、その値は$F(x) = \left(\frac{2}{V_{max}}x\right)^2$である。

この関数を微分することで落札額の確率密度関数が求まる。その値は$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2}{V_{max}^2}\right) = \frac{8x}{V_{max}^2}$である。

最後に収入の期待値は、落札額と落札額の確率密度関数の積を積分すれば求まる。

$$\int_0^{V_{max}/2} x \times \frac{8x}{V_{max}^2} dx = \frac{1}{V_{max}^2}\left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^{V_{max}/2} = \frac{V_{max}}{3}$$

同様にして次に Second Price Auction について考える。入札者は評価額と同じ額を入札するため、入札額は$\left[0, V_{max}\right]$に等確率で分布する。この範囲の確率密度関数は$f(x) = \frac{1}{V_{max}}$、累積分布関数は$F(x) = \frac{1}{V_{max}}x$である。

落札額がある値x以下になる確率の累積分布は、落札額が入札額の最小値であることから、入札額P_X, P_Yのどちらかがx以下の確率、すなわち入札額P_X, P_Yがともにxより大きい事象の余事象の確率の累積分布に等しくなり、その値は$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{V_{max}}\right)^2 = \frac{2x}{V_{max}} - \frac{x^2}{V_{max}^2}$である。

この関数を微分することで落札額の確率密度関数が求まる。その値は$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{V_{max}} - \frac{x^2}{V_{max}^2}\right) = \frac{2}{V_{max}} - \frac{2x}{V_{max}^2}$である。よって収入の期待値は

$$\int_0^{V_{max}} x \times \left(\frac{2}{V_{max}} - \frac{2x}{V_{max}^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{V_{max}} - \frac{2x^3}{3V_{max}^2}\right]_0^{V_{max}} = V_{max} - \frac{2V_{max}}{3} = \frac{V_{max}}{3}$$

以上より First Price Auction と Second Price Auction において、一様な分布の仮定のもとで出品者の収入の期待値は変わらないことが証明された。

5 入札者の利得期待値

収入の期待値の議論同様、入札者の利得の期待値を考える。どちらも入札者Xについて考える。

First Price Auction では、自分の評価額の半分を入札額に設定する。よって利得は$V_X - \frac{V_X}{2} = \frac{V_X}{2}$である。

相手の入札額はP_Yで、$\left[0, \frac{V_{max}}{2}\right]$に等確率で分布し、確率密度は$f(x) = \frac{2}{V_{max}}$である。よって自分の評価額が$V_X$の時の期待値は、落札できる条件より$P_Y < \frac{V_X}{2}$の範囲を考え、

$$\int_0^{V_X/2} \frac{V_X}{2} \times \frac{2}{V_{max}} dP_Y = \frac{1}{V_{max}} \left[V_X P_Y\right]_0^{V_X/2} = \frac{V_X^2}{2V_{max}}$$

さらにV_Xは$\left[0, V_{max}\right]$に等確率に分布するため、入札者Xの利得の期待値は

$$\int_0^{V_{max}} \left(\frac{V_X^2}{2V_{max}} \times \frac{1}{V_{max}}\right) dV_X = \left[\frac{V_X^3}{6V_{max}^2}\right]_0^{V_{max}} = \frac{V_{max}}{6}$$

次に Second Price Auction を考える。自分の評価額をそのまま入札額に設定する。また利得は$\mathrm{V_X} - \mathrm{P_Y} = V_X - V_Y$である。$\mathrm{V_Y}, V_X$の確率密度はともに$\left[0, \mathrm{V_{max}}\right]$の範囲で$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{V_{max}}}$であるため、自分の評価額が$\mathrm{V_X}$の時の期待値は、落札できる条件より$\mathrm{P_Y} = \mathrm{V_Y} < V_X$の範囲を考え、

$$\int_0^{V_X} \left(V_X - V_Y\right) \times \frac{1}{V_{max}} dV_Y = \frac{1}{V_{\max}} \left[V_X V_Y - \frac{V_Y^2}{2} \right]_0^{V_X} = \frac{V_X^2}{V_{max}} - \frac{V_X^2}{2V_{max}} = \frac{V_X^2}{2V_{max}}$$

よって First Price Auction の場合と等しい期待値が求められた。また、この議論を同じく入札者Yについても行うことで、入札者は全員等しい期待値を持つことがわかる。

6 考察と比較

以上のことから、First Price Auction であっても Second Price Auction であっても、出品者の収入の期待値、及び各入札者の利得の期待値は等しいことがわかった。これを踏まえた上で 2 つのオークション形式について比較を行う。

まず、First Price Auction では、必ず最良の結果をもたらすとは限らない。例を挙げれば、評価額を 1000 円とした人は、上記の議論では入札額を 500 円とするのが最適であるが、評価額を 100 円とした人が 50 円で入札し、前者が落札した場合、60 円で入札しても勝てた状況で 500 円も払ってしまい、後悔が発生する。これは First Price Auction で合理的であるとした「評価額の半分を入札額にする」という選択が支配戦略ではなく、期待値を最大化する戦略であるためだ。

それに対し Second Price Auction は支配戦略が存在しているため、上記の状況、500 円の入札と 50 円の入札があった場合、500 円の入札者が 50 円のみを支払うことになり、利得が最大となる。そのため、入札者はその点で無駄に迷う必要なく入札が可能となる上、最適な利得を得ることができる。以上より、ゲーム理論の観点からすれば Second Price Auction の方が優れていると言える。

7 参考文献

1. 神山眞一 (2015)「オークションにおける収入同値定理再考」,『オイコノミカ』, 51(1), pp.5-23.
   (http://jairo.nii.ac.jp/0264/00000806 より閲覧可能)