第 6 回の講義ノートの question に対する解答

１３＿１４１６６　　皆川　哲哉

1　「Q. 大気汚染ゲームの支配戦略均衡を求めよ。」に対する解答

大気汚染ゲームの設定を次にまとめておく：

- $$N = \{1, \cdots, n\} \tag{1}$$

- $$\forall i \in N\ ,\ A_i = \{C(= \text{汚染対策あり}), D(= \text{汚染対策なし})\} \tag{2}$$

- $$\forall i \in N\ ,\ u_i(a) = \begin{cases} p_i - \displaystyle\sum_{j \in N} c_j(a_j) & (a_i = D) \\ -\displaystyle\sum_{j \in N} c_j(a_j) & (a_i = C) \end{cases} \tag{3}$$

  - $$c_i(a_i) = \begin{cases} c_i > 0 & (a_i = D) \\ 0 & (a_i = C) \end{cases} \tag{4}$$

  - $$p_i > 0 \tag{5}$$

ただし、c_i は全員に累積的に及ぶコスト、p_i は個人的効用である。、

さて、このゲームの支配戦略均衡を求める。

(3) 式を変形すると、(4) 式より

$$u_i(a) = \begin{cases} p_i - c_i(a_i) - \displaystyle\sum_{j \in N - \{i\}} c_j(a_j) = p_i - c_i - \sum_{j \in N - \{i\}} c_j(a_j) & (a_i = D) \\ -c_i(a_i) - \displaystyle\sum_{j \in N - \{i\}} c_j(a_j) = -\sum_{j \in N - \{i\}} c_j(a_j) & (a_i = C) \end{cases} \tag{6}$$

となる。よって、プレーヤー i にとって、$p_i < c_i$ ならば C が支配戦略となり、$p_i > c_i$ ならば D が支配戦略となる。c_i は現実的に考えれば物理量のように連続的に値をとり得るので、完全に p_i と c_i が一致することはないと考えてよい。ゆえに、任意のプレーヤー i に対して

$$a_i^* := \begin{cases} C & (\text{ if } \quad p_i < c_i) \\ D & (\text{ if } \quad p_i > c_i) \end{cases} \tag{7}$$

と定義すると、$(a_i^*)_{i \in N} =: a^*$ はこのゲームの支配戦略均衡である。

□

2 「Q. second price auction を標準形ゲームとして定式化して、各プレーヤーにとって自分の評価額を正直に入札することが支配戦略となることを示せ。」に対する解答

オークションに参加するプレーヤー全体を $N = \{1, \cdots, n\}$ とする。入札は同時手番であり、すべてのプレーヤーにとって、ほかのプレーヤーの行動は不確実性をもつ。各プレーヤー i の商品に対する評価額を p_i 円、入札額を b_i 円とする。

このとき、各プレーヤー i のとり得る行動全体 A_i は、

$$A_i = \{[b_i] := (b_i\text{円を入札する})\}_{b_i \in \mathbb{N}} \tag{8}$$

である。以下、金額の単位 (円) は省略する。

ゲームをルールは通常、次のように設定される：

- もし、b_i が他のすべてのプレーヤーの入札額よりも高ければ、プレーヤー i は落札に成功する。その際に、プレーヤー i は 2 番目に高い入札額（他のプレーヤーの入札額の最大値）を払わなければならない。
- もし、b_i より高い額を入札したプレーヤーがいたならば、プレーヤー i は落札に失敗する。
- もし、b_i がすべてのプレーヤーの入札額の最大値であったが、その額を入札したプレーヤーが i 以外にもいたならば、その額 b_i を入札した人たちの間で公平な抽選が行われ、抽選で選ばれた人が落札に成功し、入札額 b_i を支払う。

このとき、各プレーヤーの期待利得 $\overline{u}_i$ は次のように表される：

$$\overline{u}_i(([b_j])_{j \in N}) = \begin{cases} 0 & (b_i < \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j) \\ p_i - \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j & (b_i > \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j) \\ \frac{1}{\#\{j \in N \mid b_j = b_i\}} \left(p_i - \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j \right) & (b_i = \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j) \end{cases} \tag{9}$$

ただし、任意の有限集合 A に対して、$\#A$ を A の要素の個数と定義する。

(9) 式より

(ア) $p_i < \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j$ のとき

$b_i < \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j$ となるとき、またそのときに限り、$[b_i]$ はプレーヤー i の最適応答となる。

(イ) $p_i = \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j$ のとき

すべての行動 $[b_i]$ がプレーヤー i の最適応答となる。

(ウ) $p_i > \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j$ のとき

$b_i > \max\limits_{j \in N - \{i\}} b_j$ となるとき、またそのときに限り、$[b_i]$ はプレーヤー i の最適応答となる。

$[p_i]$ は (ア)、(イ)、(ウ) すべての場合でプレーヤー i の最適応答となっているから、$[p_i]$ はプレーヤー i の支配戦略である。$[p_i]$ がプレーヤー i の唯一の支配戦略であることは次のようにして示せる。

$[b_i^*]$ をプレイヤー i の任意の支配戦略とする。

i 以外のすべてのプレーヤーが同じ行動 $[p_i+1]$ をとったときに、$[b_i^*]$ がプレーヤー i の最適応答となっていなければならないから、(ア) より

$$b_i^* < p_i + 1 \tag{10}$$

である。また、i 以外のすべてのプレーヤーが同じ行動 $[p_i-1]$ をとったときに、$[b_i^*]$ がプレーヤー i の最適応答となっていなければならないから、(ウ) より

$$b_i^* > p_i - 1 \tag{11}$$

である。(10),(11) 式より、$b_i^* = p_i$ が言える。これは、$[p_i]$ がプレーヤー i の唯一の支配戦略であることを意味する。

以上より、seconde price auction においては、各プレーヤーにとって、自分の評価額を正直に入札することが唯一の支配戦略となっていることが示された。

□

3 Q. 大気汚染ゲームで支配戦略均衡がパレート非効率的になる条件を求めよ。

1 と同様に、任意の $i \in N$ に対して $p_i \neq c_i$ が成り立つとして議論する。

$$N_1 := \{i \in N \mid p_i > c_i\} \tag{12}$$

と定義する。すなわち、N_1 は支配戦略均衡 a^* において行動 D を選択するプレーヤー全体である。

先に結論を述べると、**1** で求めた支配戦略均衡 a^* がパレート非効率となるための必要十分条件は、

$$\exists(N_1\text{の空でない部分集合 } N_2)\left[\max_{i\in N_2} p_i < \sum_{j\in N_2} c_j\right] \tag{13}$$

である。このことを以下で示す。ただし、$a^* \in \underset{j\in N}{\times} A_j$ がパレート非効率であるとは、

$$\exists a \in \underset{j\in N}{\times} A_j\,[\forall i \in N\,[u_i(a) > u_i(a^*)]] \tag{14}$$

であることを意味する。

(ア) 必要性の証明

支配戦略均衡 a^* がパレート非効率となるとする。このとき、あるパレート効率的な社会状態 $a \in \underset{j \in N}{\times} A_j$ が存在して、任意のプレーヤー $i \in N$ に対して

$$u_i(a) > u_i(a^*) \tag{15}$$

が成り立つ。また、N_1 が空であるとすると支配戦略均衡 $(C, C, \cdots, C)$ がパレート最適となってしまうので、

$$N_1 \neq \text{空集合} \tag{16}$$

である。さて、このパレート効率的な社会状態 a において戦略 D をとるプレーヤー全体を N_3 とおく。このとき

$$u_i(a) = \begin{cases} p_i - \displaystyle\sum_{j \in N_3} c_j & (i \in N_3) \\ -\displaystyle\sum_{j \in N_3} c_j & (i \notin N_3) \end{cases} \tag{17}$$

である。ちなみに、支配戦略均衡 a^* における利得は、(12) 式より

$$u_i(a^*) = \begin{cases} p_i - \displaystyle\sum_{j \in N_1} c_j & (i \in N_1) \\ -\displaystyle\sum_{j \in N_1} c_j & (i \notin N_1) \end{cases} \tag{18}$$

である。

ここで、$N_3 \subsetneq N_1$ であることを背理法によって示す。

$N_3 \nsubseteq N_1$ であると仮定する。このとき、あるプレーヤー k が存在して、$k \in N_3$かつ $k \notin N_1$ が成り立つ。よって、(12),(17) 式より、

$$u_k(a) = p_k - \sum_{j \in N_3} c_j \quad \wedge \quad p_k < c_k \tag{19}$$

が成り立つ。したがって、

$$u_k(a) = p_k - c_k - \sum_{j \in N_3 - \{k\}} c_j < -\sum_{j \in N_3 - \{k\}} c_j \tag{20}$$

となるから、もし社会状態 a においてプレーヤー k のみが行動を変更して C を選択したとすると、k を含めたすべてのプレーヤーの利得が上昇する。これは、a がパレート効率的な社会状態であることに矛盾する。ゆえに、$N_3 \subseteq N_1$ である。さらに、$a \neq a^*$ であることから、$N_3 \neq N_1$ である。よって

$$N_3 \subsetneq N_1 \tag{21}$$

が示された。

さて、(15),(17),(18) 式より、$i \in N_1 - N_3$ となる任意のプレーヤー i に対して

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j \in N_3} c_j &> p_i - \sum_{j \in N_1} c_j \\
\therefore \quad p_i &< \sum_{j \in N_1} c_j - \sum_{j \in N_3} c_j \\
\therefore \quad p_i &< \sum_{j \in N_1 - N_3} c_j \qquad \because \quad (21) \text{ 式}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。したがって、

$$\max_{i \in N_1 - N_3} p_i < \sum_{j \in N_1 - N_3} c_j \quad 。 \tag{22}$$

ゆえに、$N_2 := N_1 - N_3$ と定義すると、(16),(21) 式より N_2 は N_1 の空でない部分集合であり、(22) 式より

$$\max_{i \in N_2} p_i < \sum_{j \in N_2} c_j \tag{23}$$

が成り立つ。

□

(イ) 十分性の証明

N_1 のある空でない部分集合 N_2 が存在して、

$$\max_{i \in N_2} p_i < \sum_{j \in N_2} c_j \tag{24}$$

が成り立つと仮定する。N_2 が N_1 の部分集合であることから、支配戦略均衡 a^* では N_2 に属するすべてのプレーヤーが D を選択する。a^* における任意のプレーヤー i の利得は次のようになる：

$$
\begin{aligned}
u_i(a^*) &= \begin{cases} p_i - \sum_{j \in N_1} c_j & (i \in N_1) \\ -\sum_{j \in N_1} c_j & (i \notin N_1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} p_i - \sum_{j \in N_2} c_j - \sum_{j \in N_1 - N_2} c_j & (i \in N_2) \\ p_i - \sum_{j \in N_2} c_j - \sum_{j \in N_1 - N_2} c_j & (i \in N_1 - N_2) \\ -\sum_{j \in N_2} c_j - \sum_{j \in N_1 - N_2} c_j & (i \notin N_1) \end{cases}
\end{aligned} \tag{25}
$$

一方、N_2 に属していないすべてプレーヤーが支配戦略をとり、N_2 に属しているすべてのプレーヤーが C を選択した社会状態を a' とすると、a' における任意のプレーヤー i の利得は次のようになる：

$$
u_i(a') = \begin{cases} -\sum_{j \in N_1 - N_2} c_j & (i \in N_2) \\ p_i - \sum_{j \in N_1 - N_2} c_j & (i \in N_1 - N_2) \\ -\sum_{j \in N_1 - N_2} c_j & (i \notin N_1) \end{cases} \tag{26}
$$

(25) 式から (26) 式を引くと

$$u_i(a^*) - u_i(a') = \begin{cases} p_i - \sum_{j \in N_2} c_j & (i \in N_2) \\ -\sum_{j \in N_2} c_j & (i \in N_1 - N_2) \\ -\sum_{j \in N_2} c_j & (i \notin N_1) \end{cases} \tag{27}$$

が得られる。(24),(27) 式より、

$$\forall i \in N[u_i(a^*) < u_i(a')] \tag{28}$$

となる。ゆえに、支配戦略均衡 a^* はパレート非効率的である。

□

(ア)、(イ) より、求める条件は

$$\exists(N_1\text{の空でない部分集合 } N_2) \left[\max_{i \in N_2} p_i < \sum_{j \in N_2} c_j \right] \tag{29}$$

であることがわかった。

□