期待効用理論 Expected Utility Theory

– 合理的選択 Lecture 4 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

May 11, 2015

Outline

1 期待効用理論 Expected Utility Theory

2 お金 Money の効用

意思決定分析と基数 Cardinal 効用

復習

意思決定分析のプロトタイプ (A, Ω, p, u) が与えられたとき、選択肢 $a \in A$ の評価値は期待効用

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega)$$

- 理論分析で期待効用最大化の基準を用いたい場合、この関数型での評価値が有意味となる効用尺度の定め方の特徴を探りたい。(表現問題)
- 後に見るように、こうして定められた効用尺度で許容される変換は、単調変換ではなくアフィン変換となるため、序数効用に比べて数値の大小に定量的な意味が宿る。このことより、期待効用理論で用いられる効用のことを基数効用と呼ぶことがある。

期待効用定理 [5]

表現問題で証明したい定理は、

Theorem (期待効用定理 Expected Utility Theorem)

有限くじの空間（評価対象）$P = \Delta(C)$ 上の二項関係 $\succsim$ が *von Neumann and Morgenstern* 効用の公理（後述）を満たす
$\Leftrightarrow$ ある関数 $u : C \to \Re$ が存在して、$\forall p, q \in P$

$$p \succ q \Leftrightarrow \sum_{c \in C} p(c)u(c) > \sum_{c \in C} q(c)u(c)$$

しかも、この関数 u は、正のアフィン変換 *positive affine transformation* を除いて一意 *unique* である。

この定理を証明するのに十分で自然な条件を探すことが問題（公理化）。

くじ Lottery と混合くじ

期待効用定理の定式化の出発点としては、評価対象を結果そのものから一般化することである。

Definition (有限くじ Finite Lottery)

有限の結果 consequence の集合上 C で定義されるくじの空間は、

$$P = \Delta(C) = \{p : C \to [0,1] | \sum_{c \in C} p(c) = 1\}$$

すなわち、C 上の確率分布 probability distribution の集合。

特に、報酬 $c \in C$ が確率 1 で生じるくじを δ_c と書く（物理学などで登場するデルタ関数）。

$$\delta_c(x) := \begin{cases} 1 & (x = c) \\ 0 & (x \neq c) \end{cases}$$

混合空間 Mixture Space

Definition (混合くじ Compound Lottery)

For $p, q \in P$ and $\mu \in [0, 1]$,

$$[\mu p + (1-\mu)q](x) := \mu p(x) + (1-\mu)q(x) \in P$$

くじの混合という演算によって、くじ空間上の選好についての自然な条件を特徴付ける。

von Neumann and Morgenstern 効用の公理

期待効用定理の公理化に用いる標準的な公理群 [5] は、

Definition (von Neumann and Morgenstern 効用の公理 Axioms)

有限くじ空間 P 上の選好 $\succsim$ について：

合理性 Rationality (弱順序の公理)

独立性 Independence $\forall p, q, r \in P, \forall \mu \in (0,1)$

$$p \succ q \Rightarrow \mu p + (1-\mu) r \succ \mu q + (1-\mu) r$$

連続性 Continuity $\forall p, q, r \in P, \exists \alpha, \beta \in (0,1)$

$$p \succ q \succ r \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha) r \succ q \succ \beta p + (1-\beta) r$$

vNM 効用の標準的な定め方 (Elicitation)

$|C| \geq 2$ の有限くじ空間における期待効用定理を満たす関数の標準的な定め方は以下のとおり。

1. 結果のうち最も望ましいもの $c_{\max}$ と最も望ましくないもの $c_{\min}$ ($c_{\max} \succ c_{\min}$) に、適当に数値を割り当てる
   $u(c_{\max}) := u_{\max}, u(c_{\min}) := u_{\min}$ $(u_{\max} > u_{\min})$
2. $c \in C$ と $c_{\max}$, $c_{\min}$ のみを混ぜたくじ、すなわち $\alpha c_{\max} + (1-\alpha)c_{\min} \in P(\alpha \in [0,1])$ を α を動かしながら比較し、

   $$\delta_c \sim \alpha_c \delta_{c_{\max}} + (1-\alpha_c)\delta_{c_{\min}}$$

   を満たす $\alpha = \alpha_c$ を求める。
   $u(c) := \alpha_c u_{\max} + (1-\alpha_c)u_{\min}$

vNM 効用と好みの「強さ」

- vNM 効用は好みの定量的強さを測定する目的で定義されたわけではない[1]。
- 好みの強さ preference intensity を定量的に測定する尺度（これを価値観数 value function という）を定義する意義・測定の仕方を議論した論文も存在する。[1]
- Keller[2] は vNM 効用関数と価値関数が一致しないことを確かめた。

理論的尺度と直感

価値関数のように直感的に定量的な好みの強さをそのまま反映した結果の評価値の決め方をすると、一般にはくじの評価については期待効用という関数型を適用することができなくなることに注意。

[1] 相関がないというわけではない。

主観的期待効用 [4]

- vNM 期待効用では、確率は所与とする。確率も本質的には主観的に定まるとする立場を主観確率 subjective probability という。
- 主観確率と基数効用を同時に決める決め方を特徴付ける理論を主観的期待効用理論 subjective expected utility (SEU) theory という。

Outline

1 期待効用理論 Expected Utility Theory

2 お金 Money の効用

「お金」の効用 [3]

金銭的報酬・損失の集合を線形順序で順序付けられた連続集合 Z とする。それを用いて、効用関数 $u : Z \to \Re$ の性質を議論する。
よほどお金が嫌いでない人でない限りは、金銭的報酬が大きい方を好むだろう。このことを反映したのが次の命題。

Proposition

u は狭義単調増加関数 *strictly increasing function* である。
$\Leftrightarrow \forall z, z' \in Z[z > z' \Leftrightarrow \delta_z \succ \delta_{z'}]$

リスク態度

人や状況によって異なるかもしれないのは次の性質。
期待値の報酬 $e(p) = \sum_{z \in Z} p(z)z$ とすると、

Definition (リスク態度 Risk Attitude)

Z 上の任意のくじ p について：

リスク回避的 risk-averse $\delta_{e(p)} \succsim p$

リスク追求的 risk-seeking $p \succsim \delta_{e(p)}$

リスク中立的 risk-neutral $\delta_{e(p)} \sim p$

という。

通常の経済モデルや金融工学では、軒並み意思決定主体はリスク回避的であるとみなす。

Q. ギャンブルでは、人はリスク追求的に見えるが、これはどのように説明できるか？

リスク態度の性質

Proposition

金銭上の選好が

- リスク回避的（狭義リスク回避的）*iff* u が凹関数（狭義凹関数）
- リスク追求的（狭義リスク追求的）*iff* u が凸関数（狭義凸関数）
- リスク中立的 *iff* u がアフィン関数 $(u(z) = az + b)$

お金の単位によらないリスク態度の定量的指標として以下の指標がある。

Definition (リスク回避度 Arrow-Pratt Measure of (Absolute) Risk Aversion)

$$\lambda(z) := -u''(z)/u'(z)$$

リスク回避度が一定の関数

Proposition

u のリスク回避度が一定である *iff* $\exists a > 0, b$

$$u(z) = \begin{cases} az + b & \textit{if } \lambda(z) \equiv 0, \\ -ae^{-\lambda z} + b & \textit{if } \lambda(z) \equiv \lambda > 0. \end{cases}$$

特に、$\lambda > 0$ のとき、u が $z \to \infty$ で b に収束することに注意。

小論文課題候補

これまでの議論をふまえ、

お金で買えないものがある。

There are some things money can't buy.

という言明について議論してみよう。

リスクの評価

Definition (確実同値額 Certainty Equivalent)

くじ p の確実同値額の集合とは

$$C(p) = \{z \in Z | \delta_z \sim p\}$$

u が狭義単調増加のとき、確実同値額が高々唯一定まり、それを $c(p) \in C(p)$ と書く。

Definition (リスクプレミアム Risk Premium)

$$rp(p) := e(p) - c(p)$$

リスクプレミアムは、意思決定主体がくじ p を $\delta_{e(p)}$ と交換する（つまり、分散をゼロにする）ために払う用意のある金額。
リスク回避的な主体においては、リスクプレミアムは非負となる。

ポートフォリオ超入門

- 相関の小さな複数のくじを組み合わせることによって、全体のくじのサンプル期待値の分散を抑えることができる。
  - cf) 大数の法則 law of large numbers、中心極限定理 central limit theorem
  - リーマン・ショックなどの世界的に一様な不確実性
- 平均・分散モデル Mean-Variance Model = （ある数理的条件のもとでは）確実同値額

vNM 効用と平均・分散モデル

- vNM 効用では基底の効用値を重みづけたくじの期待値によって確実報酬の評価値を表現するが、
- 平均・分散モデルにおいては、確実報酬が評価数値の基準となる。(期待効用という関数型への理論的こだわりはない)

理論的・実用的目的に応じて柔軟に尺度設計を行うのが良い [6]。

References

Peter Farquhar and L. Robin Keller.
Preference intensity measurement.
Annals of Operations Research, 19:205–217, 1989. 10.1007/BF02283521.

L. Robin Keller.
An empirical investigation of relative risk aversion.
IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-15:475–482, 1985.

David Kreps.
Notes on the Theory of Choice.
Underground Classics in Economics. Westview Press, Oxford, 1988.

Leonard J. Savage.
The Foundations of Statistics.
John Wiley & Sons, New York, 1 edition, 1954.

John von Neumann and Oscar Morgenstern.
Theory of Games and Economic Behavior.
Princeton University Press, Princeton, 1 edition, 1944.

小林憲正.
合理的選択パラダイムと心・認識.
オペレーションズ・リサーチ機関誌, 56(10):567–575, 2011.