測定 Measurement と選好 Preference, 序数効用 Ordinal Utility

– 合理的選択 Lecture 3 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

April 27, 2015

$1 + 1 = 2$?

Example (名目数 Nominal Number, 順序数（序数）Ordinal Number)

名目数 単なるラベル – W9 号館

順序数 大小関係のみ問題 – 1 位, 2 位

名目数や順序数の集合上では、そもそも “$+$” の演算が定義されない。

Example (直感の形式モデル化)

アルコール 1 L と水 1 L を「たし」ても 2 L にはならない。

日常言語での「たす」という直感が、数学や数理科学における “$+$” の性質を満たすとは限らない。

Outline

1. 測定理論 Measurement Theory
2. 選好 Preference と序数効用 Ordinal Utility

測定 Measurement と日常言語 Ordinary Language

一般に科学理論における変数は日常言語や直感 intuition の定量的感覚を「そのまま」表す必要はない。[7]

Example (温度 Temperature)

直感で感じられるのは、せいぜいどちらの物体の方がより熱いかという程度。それ以上の定量的な温度の決め方は全て物理学で基礎づけられる。

Example (生物学的時間)

本川 [8] は、物理学的時間と異なる変数として、「生物学的」時間を提唱している。当然、測定の仕方は通常の「時計」と全く異なる。

測定と理論

しばしば、測定量や測定機器は理論や法則が数学的に美しく（単純に）表現されるように特徴づけられる。

Example (熱力学における絶対温度 Absolute Temperature)

- 絶対温度は、理想気体の状態方程式のような一連の物理法則が美しく単純に表現できるように定義された。
- 理論の発展とともに、相対温度から絶対温度へと、物理量の定義の仕方も変化したことに注意。
- 現在でも、日常の用途では、引き続き相対温度が使用される。つまり、用途に応じて、同一の物理量の定量化が異なって構わない。

Example (時計と周期的 periodical 現象)

正確な時計は正確に周期を刻むことが分かっている物理現象を利用する (e.g. 原子時計)。

測定と表現問題 Representation Problem

測定理論 measurement theory[4] では、

測定とは、観測される関係に対して、これを表現 represent もしくは保存 preserve する数値を割り当てること。

理論上の演算や関係を保存する数値の割り当て方の存在の十分条件（こうした条件を公理 axioms と呼ぶ）を探す問題を表現問題という。

- 一般に、有限個の自然な条件で、成立させたい言明を定理という形で特徴付ける作業を公理化 axiomatization という。
- 測定理論において示したい言明は表現定理 representation theorem。

許容される変換と言明の有意味性

Definition (許容される変換 Admissible Transformation)

数値尺度の変換の前後で、関係や演算の保存が保たれるような変換。

Definition (言明 Statement の有意味性 Meaningfulness)

数値尺度を含んだ言明 statement が有意味 meaningful であるとは、言明の真偽が任意の許容される変換によって変化しないことである。

Definition (一意性問題 Uniqueness Problem)

最も一般性の高い許容される変換を特定すること。

代表的な尺度 Scale の種類

尺度のタイプ	許容される変換	例
絶対 absolute	$\phi(x) = x$ 恒等 identity 変換	個数
比率 ratio	$\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$ 相似 similarity 変換	質量, 時間, 絶対温度
間隔 interval	$\phi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$ 正のアフィン affine 変換	基数効用 cardinal utility, 時刻, セ氏温度
順序 ordinal	単調増加変換 monotone increasing	序数効用 ordinal utility
名目 nominal	一対一対応 one to one	番号（順不同の場合）

小論課題候補

- 「正しく」機能する測定機器は理論・法則によって特徴づけられる。他方で、理論・法則は測定機器を用いて得られるデータによって検証されるだろう。この循環的論法的状況はいかにして解決できるか？
- 各自の専門や興味のある領域で、理論と測定量の関係付で興味深い実例があれば、講義で学んだ内容と関係付けてレポートせよ。

Outline

1 測定理論 Measurement Theory

2 選好 Preference と序数効用 Ordinal Utility

関係 Relation

Definition (関係)

集合 $A_1, \ldots, A_n$ 上の関係 R とは、$R \subset \times_{i=1}^{n} A_i$

Definition (二項関係 Binary Relation)

集合 A 上の二項関係とは $R \subset A^2$

$(x, y) \in R$ のとき、xRy とも表記し、「x と y は R で関係づけられている」と読む。

二項関係の表現 representation:

- 二次元平面上のグラフ
- 有向グラフ directed graph の隣接行列 adjacency matrix

代表的な二項関係の性質 [3]

反射 reflexive iff $\forall a \in A, aRa$

非反射 irreflexive iff $\forall a \in A, \neg(aRa)$

対称 symmetric iff $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$

非対称 asymmetric iff $\forall a, b \in A, \neg(aRb \wedge bRa)$

反対称 antisymmetric iff $\forall a, b \in A, (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$

推移 transitive iff $\forall a, b, c \in A, (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

完備（連結）complete (connected) iff $\forall a, b \in A, aRb \vee bRa$

二項関係の実例

Example

A を人の集合としよう。

- $a \in A$ が $b \in A$ のことを「好きだ」というのは、A 上の二項関係。「好き」は対称律を満たさない。e.g. 片思い
- A 上の二項関係である「友達」関係は、対称律は満たす（というふうにも定義可能だ）が、推移律は満たさない。

Q. 一夫一妻制や一夫多妻制を関係として表現して、性質を調べてみよう！

二項関係の実例 – 同値関係

Definition (同値関係 Equivalence Relation)

集合 A 上の二項関係 $\equiv$ が同値関係である iff
$\equiv$ が反射、対称、推移を満たす。

Example

等号関係 “$=$” も同値関係の一種

二項関係の実例 – 順序関係

Definition (半順序 Partial Order)

集合 A 上の二項関係 $\geq$ が半順序関係である iff
$\geq$ が反射、反対称、推移を満たす。

Definition (全順序（線形順序） Total Order (Linear Order))

完備な半順序関係を全順序（線形順序）という。

Example (実数の集合 $\Re$ 上の順序)

実数の集合 $\Re$ 上の通常の順序 $\geq$ は全順序

様々な半順序関係に同一の記号 $\geq$ を用いるので注意。

半順序の例 – 直積順序 Product Order

厚生経済学 welfare economics で社会状態 social state の評価に用いられる最も基本的な順序関係に直積順序がある。

Definition (直積順序 Product Order)

$\Re^N$ 上の二項関係 $\geq$ が直積順序である iff $\forall x, y \in \Re^N$

$$x \geq y \Leftrightarrow \forall i \in N, x_i \geq y_i$$

- $x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$
- $x \gg y \Leftrightarrow \forall i \in N, x_i > y_i$

Q. 直積順序 $\geq$ が半順序関係であることを証明せよ。

(Pareto) 効率性 Efficiency

半順序関係においては、最大元が存在しないことが多い。代わりに、極大元について考えることが便利なことが多い。
直積順序の極大元は (Pareto) 効率的であるという。

Definition ((Pareto) 効率)

$x \in S \subset \Re^N$ が

(弱 weakly) Pareto 効率的 iff $\neg\exists y \in S, y \gg x$

強 strongly Pareto 効率的 iff $\neg\exists y \in S, y > x$

合理的選好 Rational Preference

「a が b 以上に好ましい」という 選好関係 *preference relation* を $a \succsim b$ で表す。

Definition (弱順序 Weak Order)

二項関係 $\succsim$ on A が弱順序である iff $\succsim$ が完備性と推移律を満たす。

選好関係が弱順序 weak order の公理を満たすとき、経済学用語で合理的 rational であるという。

記号の違いに注意！

半順序 $\geq$

弱順序 $\succsim$

弱順序関係の成分分解

Definition

強成分 Strict component $a \succ b \Leftrightarrow a \succsim b \wedge \neg(b \succsim a)$

無差別成分 Indifference component $x \sim y \Leftrightarrow a \succsim b \wedge b \succsim a$

Proposition

$\succsim$ が合理的ならば：

- $\succ \cup \sim = \succsim \wedge \succ \cap \sim = \emptyset$
- $\succ$ は非反射的、非対称的で推移的
- $\sim$ は同値関係
- $\forall x, y, z \in X[x \succ y \sim z \Rightarrow x \succ z]$

弱順序と半順序

弱順序関係は、互いに無差別な要素を同値類でまとめることにより、線形順序と相当程度同一視できる。

一般には無差別を比較不可能により定義できない。
つまり、一般には半順序を弱順序に同一視できない。

Q. $\Re^2$ 上の直積順序において、

$$\forall x, y \in \Re^2, x \sim y \Leftrightarrow x \text{と} y \text{が比較不可能}$$

と無差別関係 $\sim$ を定義することができない（つまり、無差別関係の数理的性質を満たさない）ことを、実例を挙げて示せ。

専門用語としての合理性

- 好みが安定的 stable である
- 好みが内部整合性 internal consistency を満たす（導かれる選択が整合的である）
- 好みは意思決定主体の個性（社会正義、倫理、美　などの外的価値に一般には制約されない）
- 合理性 $\neq$ 知性　（意思決定問題が簡単であれば、簡単に解ける）

選好が合理性を満たさない場合に考えられる原因：

- そもそも完備な評価が不要 – e.g. 圧倒的なナンバーワンの存在により、ナンバー 2 以下の選択肢どうしの比較が不要
- そもそもランキングが困難 – e.g. 社会配分 allocation の評価
- グループの擬人化（e.g. 法人格 corporate actor）
- 区別できないほどの微少な差（限定合理性の一種）[5]
- フレーミング効果 framing effect [6]
- 不完備情報などによる意図せざる好みの変化 – e.g. 中毒 addiction[2]

法人格の合理性 – 集団意思決定による社会的選好

Q. 多数決 majority voting は合理的な集団意思決定手法か？

法人格の合理性 – 集団意思決定による社会的選好

Q. 多数決 majority voting は合理的な集団意思決定手法か？

Example (コンドルセのパラドックス Condorcet's Paradox)

３人の投票者 $\{1,2,3\}$ がそれぞれ以下で表される選好 $\succsim_i (i=1,2,3)$ を $A=\{a,b,c\}$ 上に持つとする。

1. $a \succ_1 b \succ_1 c$
2. $b \succ_2 c \succ_2 a$
3. $c \succ_3 a \succ_3 b$

多数決によって決まる「社会的選好 social preference」を $\succsim$ とおくと

$$a \succ b \text{ かつ } b \succ c \text{ かつ } c \succ a$$

よって、$\succsim$ は推移律を満たさない。

社会的選択理論とアロー Arrow の定理

Condorcet のパラドックスを一般化して、Arrow は（極めて自然な前提より）「合理的、パレート効率的かつ民主的 democratic な投票制度は存在しない（唯一のパレート効率的な合理的な投票制度は独裁制 dictatorship である）」ことを証明した。（ノーベル経済学賞受賞理由の一部）
興味ある人は、以下のキーワードを手がかりに自分で調べてみよう！:

- 社会的選択理論 social choice theory
- 社会厚生関数 social welfare function
- アローの定理 Arrow's theorem[1]

序数効用 Ordinal Utility と表現 Representation

Definition (表現 Representation)

序数効用関数 $u : A \to \Re$ が選好関係 $\succsim$ on A を表現する iff $\forall x, y \in A$

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Example

$A = \{x, y, z\}$ とする。$x \succ y \succ z$ ならば、効用関数 $u : A \to \Re$ を $u(x) = 3, u(y) = 2, u(z) = 1$ と定めれば、u は、$\succsim$ を表現する。

序数効用と単調変換

一つの選好関係 $\succsim$ を表現する序数効用は、一意的には定まらない。

Proposition

効用関数 u が選好関係 $\succsim$ を表現する $\Rightarrow$
$\forall \sigma : \Re \to \Re$ 単調増加 *monotone increasing* 関数, $\sigma \circ u$ は $\succsim$ を表現する。

Example (先の例の続き)

$\sigma(a) = a^2$ と定めると、$\sigma \circ u(x) = 9, \sigma \circ u(y) = 4, \sigma \circ u(z) = 1$ となり、確かに、$\succsim$ を表現している。

このことからも分かるように、u は順序関係のみの情報を持ち、定量的な大きさは意味を持たない。また、四則演算も使えない。

表現可能性

Theorem (表現可能性)

選好関係が合理的であるときのみ、序数効用関数で表現可能である。

Proposition

選択肢集合 X が有限ならば、すべての合理的な選好関係は序数効用関数によって表現可能である。

Q. これを証明してみよう！

選択肢空間が連続の場合の表現可能性

連続な選択肢空間上では、全ての合理的な選好関係が序数効用によって表現可能というわけではない。

Definition (連続性 Continuity)

X 上の二項関係 R が連続である iff upper contour set $\{x \in X | xRy\}$ と lower contour set $\{x \in X | yRx\}$ がともに閉集合である

Proposition

すべての連続で合理的な選好関係は、連続な効用関数で表現可能である。

Example (辞書式順序)

$[0,1] \times [0,1]$ 上の辞書式順序で表される選好関係を表現する序数効用関数は存在しない。

References

Kenneth J. Arrow.
Social choice and individual values.
Yale University Press, 1951.

Gary S. Becker and Kevin M. Murphy.
A theory of rational addiction.
Journal of Political Economy, 96(4):675–700, 08 1988.

David Kreps.
Notes on the Theory of Choice.
Underground Classics in Economics. Westview Press, Oxford, 1988.

Fred S. Roberts.
Measurement theory with applications to decision making, utility, and the social sciences, volume 7 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*.
Cambridge University Press, New York, 1985.

Ariel Rubinstein.
Modeling Bounded Rationality.
MIT Press, Cambridge, 1997.

Amos Tversky and Daniel Kahneman.
The framing of decisions and the psychology of choice.
Science, 211(4481):453–458, 1981.

John von Neumann and Oscar Morgenstern.
Theory of Games and Economic Behavior.
Princeton University Press, Princeton, 1 edition, 1944.

本川達雄.
ゾウの時間ネズミの時間.
中公新書, 1992.