合理的選択　レポート No.1

１３＿１４１６６　　皆川　哲哉

このレポートでは、講義ノートで使われている文字や定義をそのまま用いる。また、効用あるいは効用の期待値を大きくすることを「良い」ことと書くことにする。

「知は力なり」と主張するとされる定理：

$$\forall p, \forall u \, [\, \mathrm{EVPI} \geq 0 \,] \tag{1}$$

があるのに、「知らぬが仏」という状況は存在し得るのであろうか。すなわち、意思決定主体が意思決定をする時までになんらかの情報を取得することにより、効用が（情報を取得しなかったと仮定したときの効用より）小さくなってしまうことがありえるのであろうか。このレポートでは、この問題について議論する。

まず、念のため定理 (1) を証明する。

$p : \Omega \to \mathbb{R}$ を任意の確率分布、$u : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ を任意の効用関数とする。
$a' \in A$ と $\omega \in \Omega$ を任意にとると、

$$\begin{aligned} \max_{a \in A} u(a, \omega) - u(a', \omega) &\geq 0 \qquad \because \ \max \text{の定義} \\ \therefore \quad p(\omega) \left\{ \max_{a \in A} u(a, \omega) - u(a', \omega) \right\} &\geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。$\omega \in \Omega$ は任意にとったので、

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \left\{ \max_{a \in A} u(a, \omega) - u(a', \omega) \right\} &\geq 0 \\ \therefore \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \max_{a \in A} u(a, \omega) &\geq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a', \omega) \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、$a' \in A$ は任意にとったので

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \max_{a \in A} u(a, \omega) \geq \max_{a \in A} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega) \quad 。$$

ゆえに、

$$\mathrm{EVPI} \equiv \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \max_{a \in A} u(a, \omega) - \max_{a \in A} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega) \geq 0$$

を得る。

□

定理 (1) は、次のように表現することもできる：

定理 (1) $\iff$ 「Ωの中のどの状態が実現されるのかを、意思決定主体が
意思決定する前に知ることができる場合の効用 u の期待値 E_1 は、
知ることのできない場合の効用 u の期待値 E_2 以上である。」。

ちなみに、

$$E_1 \equiv \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) \max_{a\in A} u(a,\omega) \quad , \quad E_2 \equiv \max_{a\in A} \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) u(a,\omega)$$

である。

したがって、定理 (1) は、Ω の中のどの状態が実現されるのかを、意思決定する前に知ることができた方が、できないより「良い」ということを意味しているだけなのである。別の言い方をすると、定理 (1) は、Ω の中のどの状態が実現されるのかということとは関係のない情報については、一切言及していないのである。よって、当然、知らない方が「良い」情報が存在する余地はある。すなわち、知らない方が「良い」情報が存在したとしても、矛盾は生じない。

さて、適当なモデルの下では、知らない方が「良い」情報が存在することを示す。今回は、講義で扱われた簡単なモデルを採用する。

効用 u が幸福度（すなわち、幸せだと感じる度合）を表すとして、

$$A \equiv \{\mathrm{in}\,,\,\mathrm{out}\} \quad , \quad \Omega \equiv \{\mathrm{fine}\,,\,\mathrm{rainy}\} \quad ,$$

$$u(\mathrm{in}\,,\,\mathrm{fine}) = 0\ ,\ u(\mathrm{in}\,,\,\mathrm{rainy}) = 0\ ,\ u(\mathrm{out}\,,\,\mathrm{fine}) = 1\ ,\ u(\mathrm{out}\,,\,\mathrm{rainy}) = -1$$

であったとしよう。この時点で意思決定をすれば、効用 u は当然、-1 以上になる。

そこで、意思決定をする直前に、恋人が浮気をしているという情報を取得した場合を考えてみる。幸福度 u は下のような値に変化するのが自然であろう：

$$u(\mathrm{in}\,,\,\mathrm{fine}) = -10\ ,\ u(\mathrm{in}\,,\,\mathrm{rainy}) = -10\ ,\ u(\mathrm{out}\,,\,\mathrm{fine}) = 1-10\ ,\ u(\mathrm{out}\,,\,\mathrm{rainy}) = -1-10 \quad 。$$

この時点で意思決定をすれば、効用 u は、-9 以下になってしまう。つまり、この意思決定主体は、恋人が浮気をしているという情報を知らない方が「良かった」わけである。

最後に結論を書いておくと、適当なモデルの下では、知っていた方が「良い」情報もあり、知らない方が「良い」情報もあるのである。