不確実性下の意思決定 Decision under Uncertainty

合理的選択 Lecture 2

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

April 20, 2015

Outline

1 不確実性下の意思決定 Decisions under Uncertainty

2 リスク（確率つき不確実性）Decisions under Risk

不確実性下の意思決定問題

Definition ((Prototype) Decision Problem with Uncertainty)

A decision problem with uncertainty is a structure $\langle A, \Omega, u \rangle$, where:

- A is a set of alternatives 選択肢の集合
- Ω is a state space of uncertainty 不確実性の状態空間
- $u : A \times \Omega \to \Re$ is a utility function 効用関数

不確実性下の意思決定問題の行列表現

不確実性下の意思決定問題の Matrix Representation 行列表現

Label of row 行 alternatives $a \in A$

Label of column 列 uncertainty states $\omega \in \Omega$

Value of each cell (a, ω) $u(a, \omega)$

Example (天気と休日の外出)

$A \setminus \Omega$	晴れ or 曇り fine	雨 rain
外出 out	1	-1
家にいる in	0	0

行列表現の例

Example (じゃんけん)

プレーヤー 1, 2 による２人じゃんけんを考える。
勝ち、あいこ、負けによって得られる効用をそれぞれ $1, 0, -1$
1, 2 の出す手の集合は $A_1 = A_2 = \{$ グー, チョキ, パー $\}$
プレーヤー 1 の意思決定問題は、

- $A = A_1$
- $\Omega = A_2$ （標準的な）合理的選択モデルにおいては、他者については、その主体がとる行動のみに関心がある

$A_1 \backslash A_2$	グー	チョキ	パー
グー	0	1	-1
チョキ	-1	0	1
パー	1	-1	0

超有名なゲームの一人意思決定モデルとしての表現

Definition (囚人のジレンマ Prisoners' Dilemma)

	Cooperate	Defect
C	3	-1
D	5	1

社会規範 norm、協力関係や信頼 trust などをモデル化する際に使われるゲームモデル

Definition (チキン Chicken もしくはタカハト Hawk-Dove)

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

進化ゲーム理論 evolutionary game theory において、特に重要なゲーム

支配 Dominance

意思決定状況によっては、不確実性の状態 ω によらず、ある選択肢 a のほうが別の選択肢 a' より望ましいことがある。

Definition (支配 Dominance)

Let $\langle A, \Omega, u \rangle$ be a decision problem with uncertainty.

- $a \in A$ (weakly) dominates $a' \in A$ iff

$$\forall \omega \in \Omega, u(a, \omega) \geq u(a', \omega) \quad \text{and} \quad \exists \omega \in \Omega, u(a, \omega) > u(a', \omega)$$

- $a \in A$ strictly dominates $a' \in A$ iff

$$\forall \omega \in \Omega, u(a, \omega) > u(a', \omega)$$

- $a \in A$ is a dominant strategy 支配戦略 iff

$$\forall a' \in A \forall \omega \in \Omega, u(a, \omega) \geq u(a', \omega).$$

支配の例

Example (Prisoners' Dilemma)

	Cooperate	Defect
C	3	-1
D	5	1

D dominates C.
D is a dominant strategy.

Example (Hawk-Dove)

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

支配戦略は存在しない。

Max-Min Strategy, Max-Max Strategy

支配戦略が存在しない場合の意思決定手法の一つとして以下の様な手法が考えられる。

Definition (Max-Min Strategy)

$$\arg\max_{a\in A}\min_{\omega\in\Omega} u(a,\omega)$$

自分の行動 $a \in A$ ごとに最悪の場合を想定し、得られる効用 $\min_{\omega\in\Omega} u(a,\omega)$ を最大にする最も悲観的な戦略

Definition (Max-Max Strategy)

$$\arg\max_{a\in A}\max_{\omega\in\Omega} u(a,\omega)$$

$a \in A$ ごとに最高の場合を想定し、想定効用 $\max_{\omega\in\Omega} u(a,\omega)$ を最大にする最も楽観的な戦略

Max-Min Strategy の実例

Example (Hawk-Dove)

Step 1: $a \in A$ ごとに最悪の効用の場合を想定する

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

Step 2: $\min u(a, \omega)$ を最大にする $a \in A$ を求める

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

Hawk-Dove ゲームでは、max-min 戦略の集合は $\{dove\}$ となる。

Q. 囚人のジレンマゲームや天気の実例で max-min 戦略を求め、その性質を体感してみよう。

Outline

1 不確実性下の意思決定 Decisions under Uncertainty

2 リスク（確率つき不確実性）Decisions under Risk

リスク下の意思決定問題

不確実性の状態の生起確率が与えられている状況をリスク risk とよぶことがある。

Definition ((Prototype) Decision Problem under Risk)

A decision problem under risk is a structure $\langle A, \Omega, p, u \rangle$, where:

- A is a set of alternatives
- Ω is a state space of uncertainty
- $p \in \Delta(\Omega)$ is a probability distribution 確率分布 on Ω
- $u : A \times \Omega \to \Re$ is a utility function

Example (天気と外出)

$A \setminus \Omega$	fine	rain
out	1	-1
in	0	0

Ω	fine	rain
p	0.7	0.3

期待効用 Expected Utility

Definition (Expected Utility)

For decision problem under risk $\langle A, \Omega, p, u \rangle$, the expected utility of alternative $a \in A$ is

$$Eu(a) := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega)$$

リスク下での期待効用最大化 expected utility maximization

$$\max_{a \in A} Eu(a)$$

は、合理的選択の最も基本的なモデル化の一つ。
特に、リスク下の意思決定状況では、max-min のような他の意思決定基準に比べて尤もらしそうに感じられることを後に議論する。

Example (天気と外出)

$p(fine) = p \in [0,1]$ とおき、p を動かしてみる。

$$\begin{aligned} Eu(out) &= p(fine) \cdot u(out, fine) + p(rain) \cdot u(out, rain) \\ &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1 \\ Eu(in) &= p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Eu(in) \geq Eu(out) & (p \in [0, 1/2]) \\ Eu(out) \geq Eu(in) & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

$$\max_{a \in A} Eu(a) = \begin{cases} Eu(in) = 0 & (p \in [0, 1/2]) \\ Eu(out) = 2p - 1 & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

$$\arg\max_{a \in A} Eu(a) = \begin{cases} \{in\} & (p \in [0, 1/2)) \\ \{in, out\} & (p = 1/2) \\ \{out\} & (p \in (1/2, 1]) \end{cases}$$

期待効用の応用 – 情報の価値 Value of Information

不確実性を解消するべく情報を取得するかどうかの意思決定に使う情報の事前 ex-ante 評価値は、以下のように求めることができる。

Definition (Expected Value of Perfect Information (EVPI))

For a decision problem under risk is a structure $\langle A, \Omega, p, u \rangle$, the expected value of obtaining perfect information regarding uncertainty Ω is

$$EVPI := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \max_{a \in A} u(a, \omega) - \max_{a \in A} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega)$$

第 1 項は、情報取得後に $\omega \in \Omega$ ごとに最適な $a = a(\omega)$ を選んだことによって得られる効用の期待値
第 2 項は $\max_{a \in A} Eu(a)$

取得された情報の精度が完全でない場合のモデリングは別途ある。

「知は力なり」の定理

定義から容易に証明できるが、
情報の価値は、意思決定問題によらず、非負である。

Theorem (Knowledge is Power 知は力なり)

$$(\forall p, u) \qquad EVPI \geq 0$$

Example (天気と外出)

$$\begin{aligned}(\text{第 1 項}) &= p(fine) \cdot u(out, fine) + p(rain) \cdot u(in, rain) \\ &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p\end{aligned}$$

$$EVPI = \begin{cases} p - Eu(in) = p & (p \in [0, 1/2]) \\ p - Eu(out) = 1 - p & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

よって、確かに $\forall p \in [0,1], EVPI \geq 0$

感度分析 Sensitivity Analysis

- システムのパラメータを変えて、出力の振る舞いを調べることを感度分析という。
- パラメータを変化させて、仮想シナリオ（様々な均衡）の変化を見るという意味で比較静学 comparative statics という表現が用いられることもある。

以下、u, p などを動かして情報の価値の定性的性質を調べてみよう。

情報の価値がない場合 I – 無差別（無関心）Indifference

全ての状態で評価値が変わらない場合、意思決定主体は不確実性の状態について無関心（効用が無差別）であるという。

Definition (Indifference)

The decision maker is indifferent among the states of uncertainty Ω iff

$$\forall a \in A, \forall \omega, \omega' \in \Omega [u(a, \omega) = u(a, \omega')]$$

cf) 好きの反対は無関心。

Proposition

If the decision maker is indifferent among the states of uncertainty, then EVPI is zero.

Example (天気と外出)

外出時に常に屋内にいる場合。

情報の価値がない場合 II – 支配 Dominance

Proposition

If there exists a dominant strategy $a \in A$, then EVPI is zero.

Q. 天気と外出の事例で、どういう場合に支配が成立するか考えてみよう。

Proposition

If the decision maker is indifferent among the states of the world, then there exists a dominant strategy.

無関心は、支配が成り立つ極端な場合である。

情報の価値が小さい場合 – どれかの状態が実現するかほぼわかっている場合 –

Example (天気と外出)

$$EVPI = \begin{cases} p & (p \in [0, 1/2]) \\ 1-p & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

から分かる通り、ほぼ fine ($p \approx 1$) もしくはほぼ rain ($p \approx 0$) とわかっているときは、

$$EVPI \approx 0$$

(例 – 砂漠では天気予報の情報の価値はほとんどゼロ。)

Q. 情報の価値 EVPI と情報理論におけるエントロピーの関係について議論せよ。