ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 0）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	x or y	x or y	x or z	
x>z>y	x	x	x or y		x or z	x or z
y>x>z	x or y	x or y	y	y		y or z
y>z>x	x or y		y	y	y or z	y or z
z>x>y	x or z	x or z		y or z	z	z
z>y>x		x or z	y or z	y or z	z	z

(Step 1) パレート原理に沿って選択肢を絞り込む。

(Step 2) 1 行 3 列に注目。以下の 2 通りのケースを考える。

ケース 1： x を仮定する。

ケース 2： y を仮定する。

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 1-1）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	x	x ~~or y~~	x or z	x or z
x>z>y	x	x	x or y		x or z	x or z
y>x>z	x or y	x or y	y	y		y or z
y>z>x	x or y		y	y	y or z	y or z
z>x>y	x or z	x or z		y or z	z	z
z>y>x		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1：1 行 3 列において y を仮定する。

① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>x>z のとき，2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能

⇒ 1 行目において y が選ばれることはない

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 1-2）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	x	x	~~x or z~~	~~x or z~~
x>z>y	x	x	x or y		x or z	x or z
y>x>z	x or y	x or y	y	y		y or z
y>z>x	x or y		y	y	y or z	y or z
z>x>y	x or z	x or z		y or z	z	z
z>y>x		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1：1 行 3 列において y を仮定する。

① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>x>z のとき，2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能

⇒ 1 行目において y が選ばれることはない

② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>z>x のとき，2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能

⇒ 1 行目において z が選ばれることはない

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 1-3）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	x	x	x	x
x>z>y	x	x	x ~~or y~~	x	x ~~or z~~	x ~~or z~~
y>x>z	x or y	x or y	y	y		y or z
y>z>x	x or y		y	y	y or z	y or z
z>x>y	x or z	x or z		y or z	z	z
z>y>x		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1：1 行 3 列において y を仮定する。

① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>x>z のとき，2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能

⇒ 1 行目において y が選ばれることはない

② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>z>x のとき，2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能

⇒ 1 行目において z が選ばれることはない

③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば，1 の真の選好が x>z>y のときに x>z>y と表明することで，より望ましい x を選択することが可能

⇒ 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 1-4）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	x	x	x	x
x>z>y	x	x	x	x	x	x
y>x>z	x or y	x or y	y	y		y ~~or z~~
y>z>x	x or y		y	y	y or z	y or z
z>x>y	x or z	x or z		y or z	z	z
z>y>x		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1：1 行 3 列において y を仮定する。

① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>x>z のとき，2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能

⇒ 1 行目において y が選ばれることはない

② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>z>x のとき，2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能

⇒ 1 行目において z が選ばれることはない

③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば，1 の真の選好が x>z>y のときに x>z>y と表明することで，より望ましい x を選択することが可能

⇒ 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない

④ 仮に 3 行 6 列において z が選ばれるならば，1 の真の選好が y>x>z，2 の表明された選好が z>y>x のとき，1 は x>y>z と表明することで，より望ましい x を選択可能

⇒ 3 行 6 列においては y が選択される

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 1-5）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	x	x	x	x
x>z>y	x	x	x	x	x	x
y>x>z	~~x or~~ y	~~x or~~ y	y	y	y	y
y>z>x	~~x or~~ y	y	y	y	y ~~or z~~	y ~~or z~~
z>x>y	x or z	x or z		y or z	z	z
z>y>x		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 1：1 行 3 列において y を仮定する。

① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>x>z のとき，2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能

⇒ 1 行目において y が選ばれることはない

② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>z>x のとき，2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能

⇒ 1 行目において z が選ばれることはない

③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば，1 の真の選好が x>z>y のときに x>z>y と表明することで，より望ましい x を選択することが可能

⇒ 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない

④ 仮に 3 行 6 列において z が選ばれるならば，1 の真の選好が y>x>z，2 の表明された選好が z>y>x のとき，1 は x>y>z と表明することで，より望ましい x を選択可能

⇒ 3 行 6 列においては y が選択される

⑤ ①～③の議論と同様にして，3 行目及び 4 行目において x もしくは z が選ばれないことが示せる

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 1-5）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	x	x	x	x
x>z>y	x	x	x	x	x	x
y>x>z	y	y	y	y	y	y
y>z>x	y	y	y	y	y	y
z>x>y	~~x or~~ z	~~x or~~ z	z	~~y or~~ z	z	z
z>y>x	z	~~x or~~ z	~~y or~~ z	~~y or~~ z	z	z

ケース 1：1 行 3 列において y を仮定する。

① 仮に 1 行目において y となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>x>z のとき，2 は戦略的投票を通じて y を選択することが可能

⇒ 1 行目において y が選ばれることはない

② 仮に 1 行目において z となるケースが存在すれば，1 の表明された選好が x>y>z，2 の真の選好が y>z>x のとき，2 は戦略的投票を通じて z を選択することが可能

⇒ 1 行目において z が選ばれることはない

③ 仮に 2 行目において y もしくは z となるケースが存在すれば，1 の真の選好が x>z>y のときに x>z>y と表明することで，より望ましい x を選択することが可能

⇒ 2 行目において y もしくは z が選ばれることはない

④ 仮に 3 行 6 列において z が選ばれるならば，1 の真の選好が y>x>z，2 の表明された選好が z>y>x のとき，1 は x>y>z と表明することで，より望ましい x を選択可能

⇒ 3 行 6 列においては y が選択される

⑤ ①～③の議論と同様にして，3 行目及び 4 行目において x もしくは z が選ばれないことが示せる

⑥ ④～⑤の議論と同様にして，5 行目及び 6 行目において x もしくは y が選ばれないことが示せる

⇒ 投票者 1 が独裁者の独裁ルールが導出される■

ギバード・サタースウェイトの定理の証明

（表 2）

2 / 1	x>y>z	x>z>y	y>x>z	y>z>x	z>x>y	z>y>x
x>y>z	x	x	y	x or y	x or z	x or z
x>z>y	x	x	x or y		x or z	x or z
y>x>z	x or y	x or y	y	y		y or z
y>z>x	x or y		y	y	y or z	y or z
z>x>y	x or z	x or z		y or z	z	z
z>y>x		x or z	y or z	y or z	z	z

ケース 2：1 行 3 列において y を仮定する。(以下の証明は宿題)