現代経済の諸問題
Ⅵ 社会厚生汎関数と個人間比較可能性

山邑紘史
yamamura-h@soc.titech.ac.jp

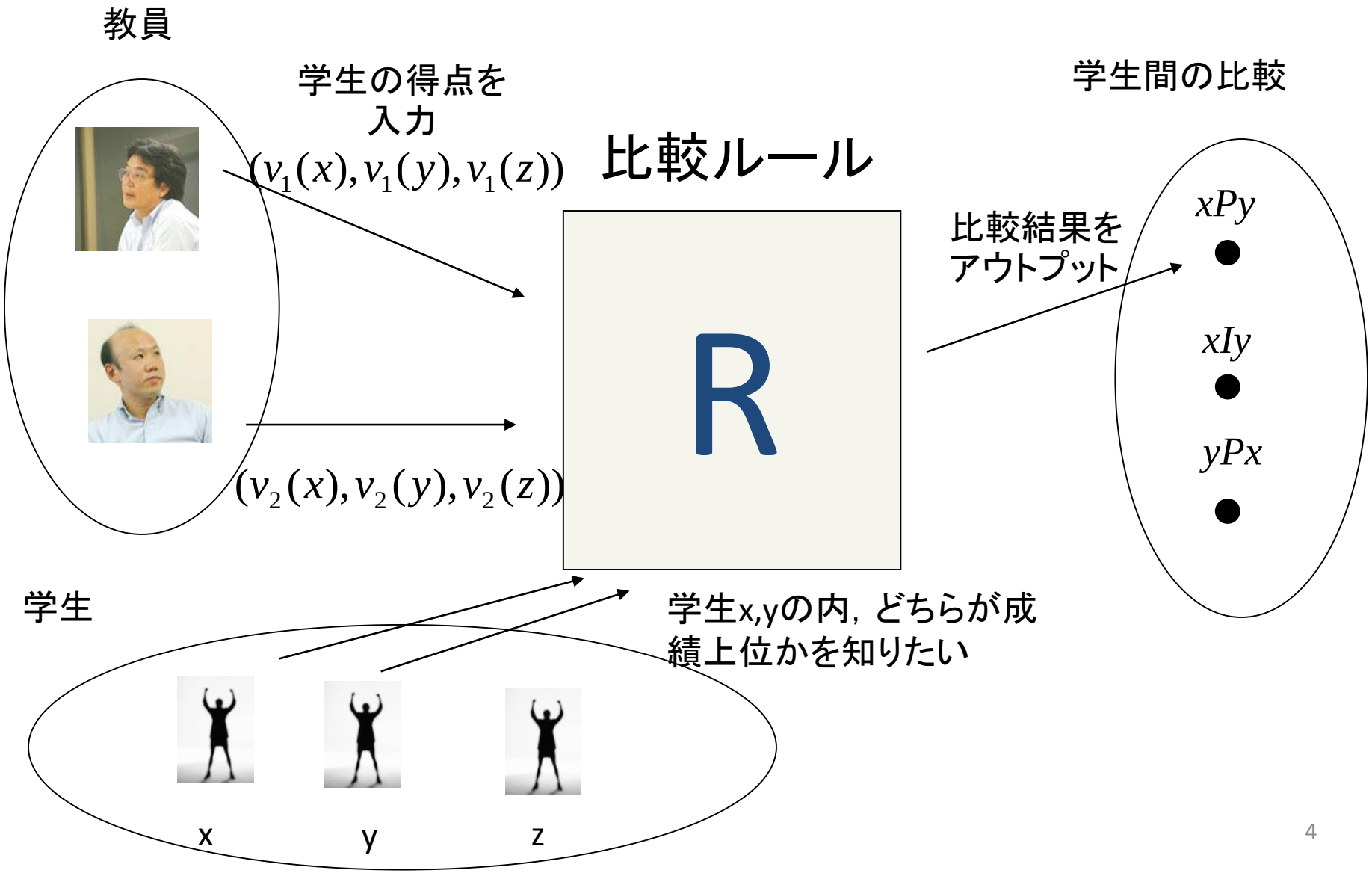
アローの不可能性定理

$\#A \geq 3$ のとき,「定義域の非限定性」「パレート原理」「無関連対象からの独立性」「非独裁性」の4条件をみたす社会厚生関数は存在しない。

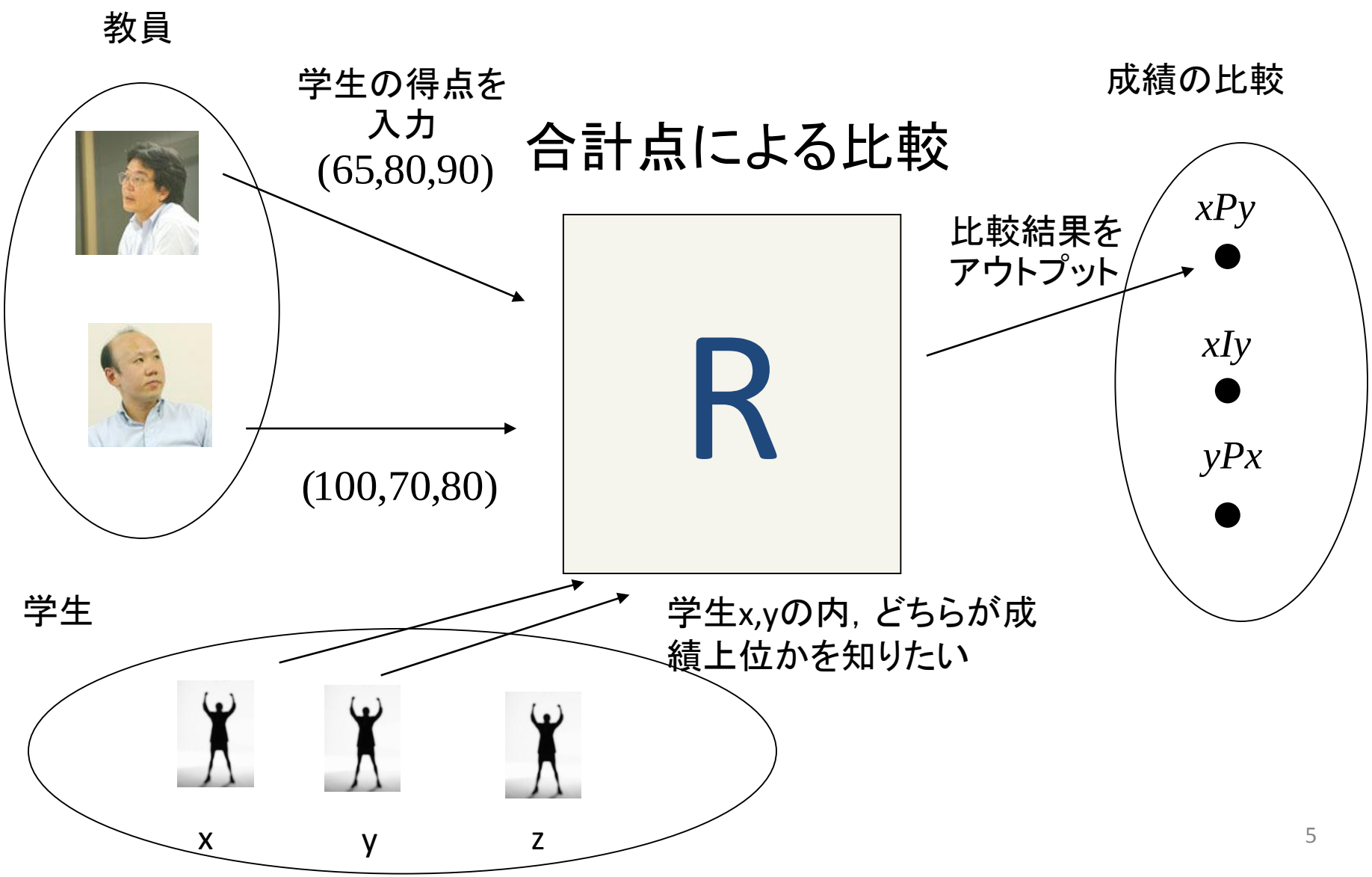
評価の集計

- 一方で「評価を集計して順位を付ける」という状況において，しばしば「定義域の非限定性」「パレート原理」「無関連対象からの独立性」「非独裁制」の4条件を充足するよう順位づけが行われている。
- 例
  - 社会工学専攻の学生の成績順を，複数の科目での評価をもとに決定する
  - スポーツの採点競技（体操・フィギュアスケートetc）において，複数の審査員の採点をもとに選手の順位を決定する。

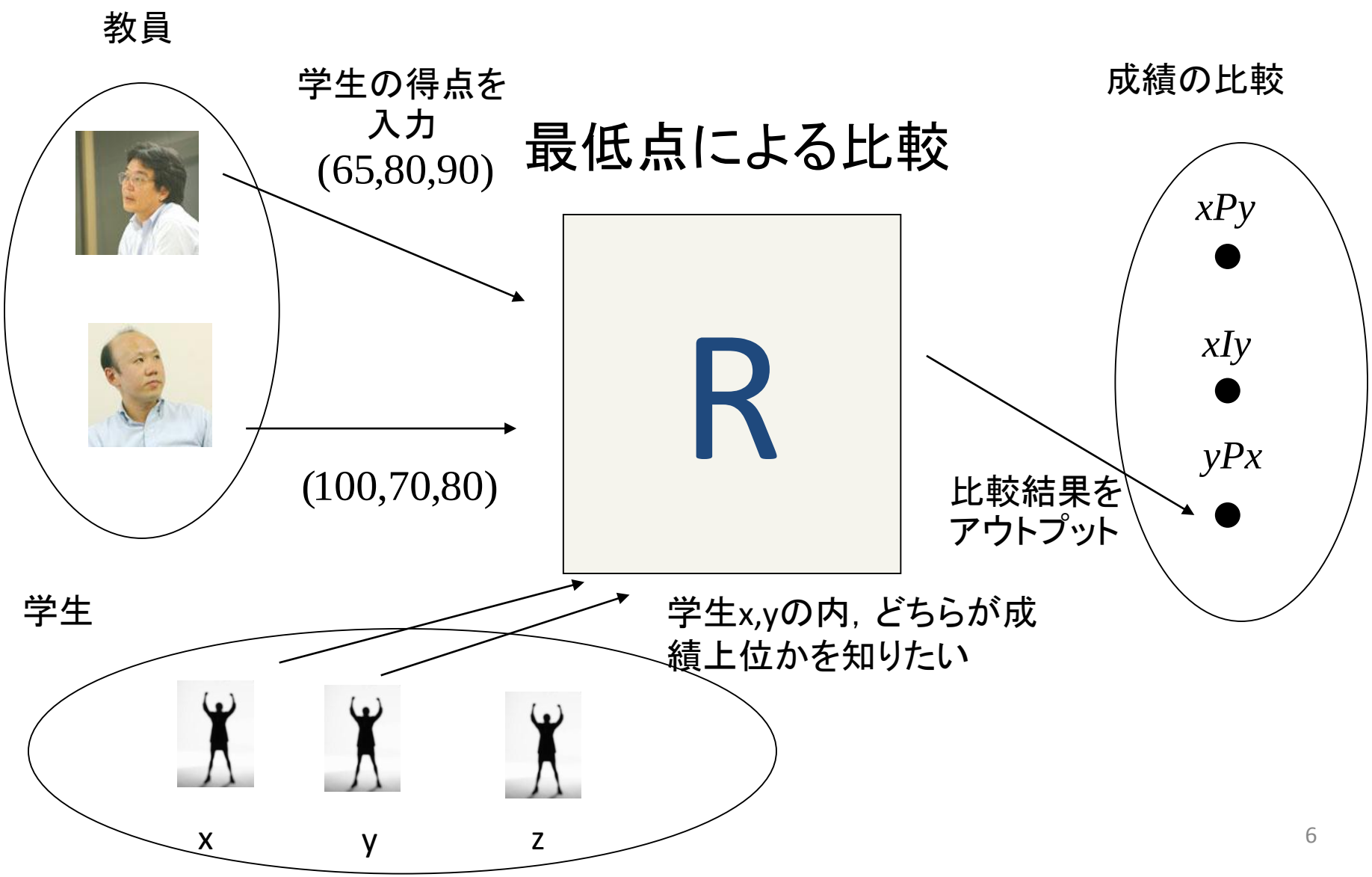
例：社工の学生の順位づけ



例：社工の学生の順位づけ



例：社工の学生の順位づけ



数値に基づく集計と順序に基づく集計

- 合計点による成績の集計
  1. 入力される得点に特に制約はない⇒定義域の非限定性
  2. 全教員がより高い得点を出す学生が成績上位に⇒パレート原理
  3. 学生xと学生yの成績を比較する際に，学生zの成績を利用しない⇒無関連対象からの独立性
  4. ある特定の教科で1位の学生が，全教科合計で1位になるとは限らない⇒非独裁性

⇒アローの定理の4条件をみたす集計がなされている。

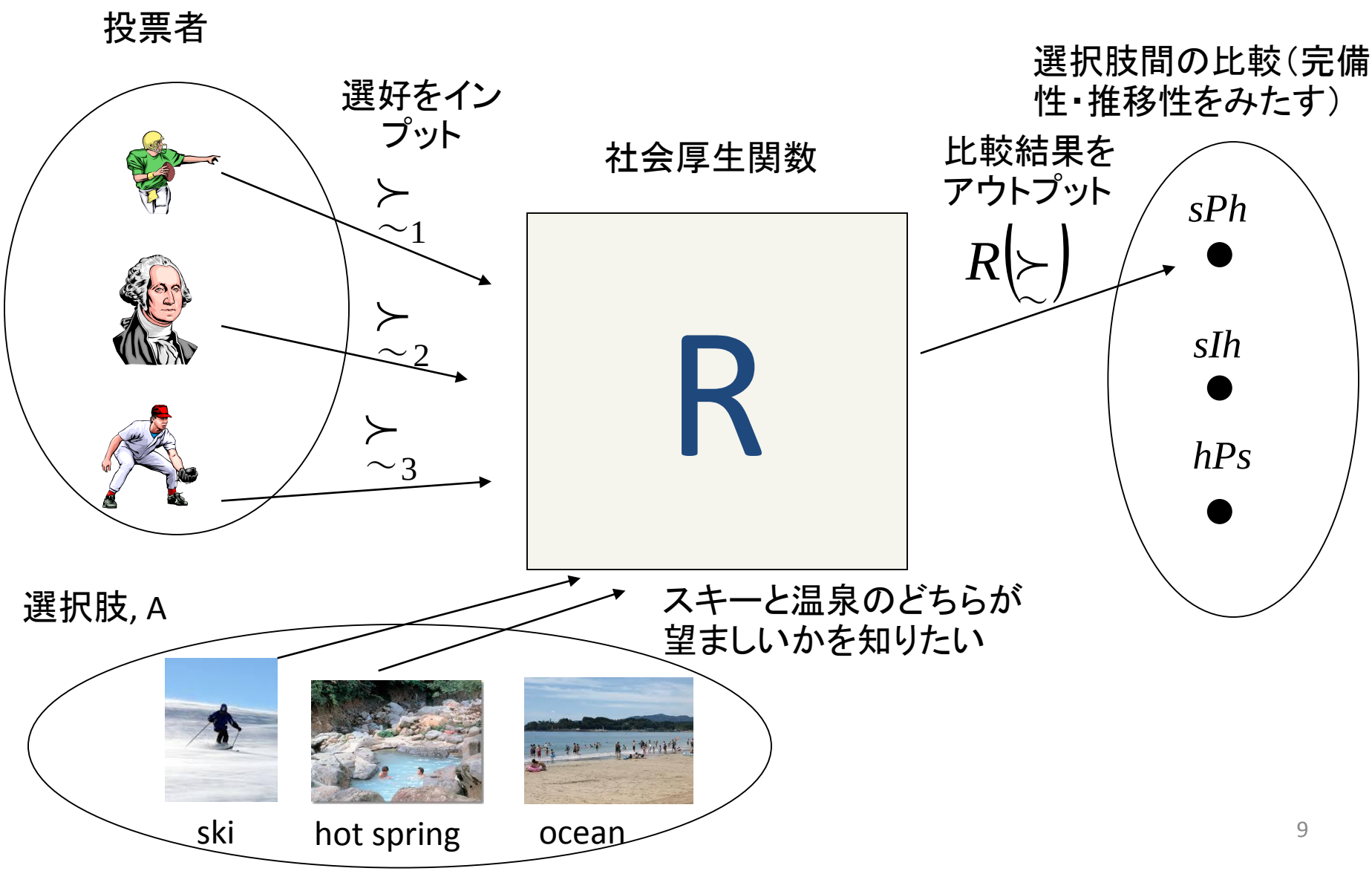
数値に基づく集計と順序に基づく集計

- 社会厚生関数と成績集計の状況との相違点
  - 社会厚生関数においても，成績集計の状況においても，順序に関する情報が入力される点では共通している。
  - しかし，成績集計の状況においては，実際入力されるのは（実数の）得点であるため，実際には順序以外の情報が用いられている可能性がある。

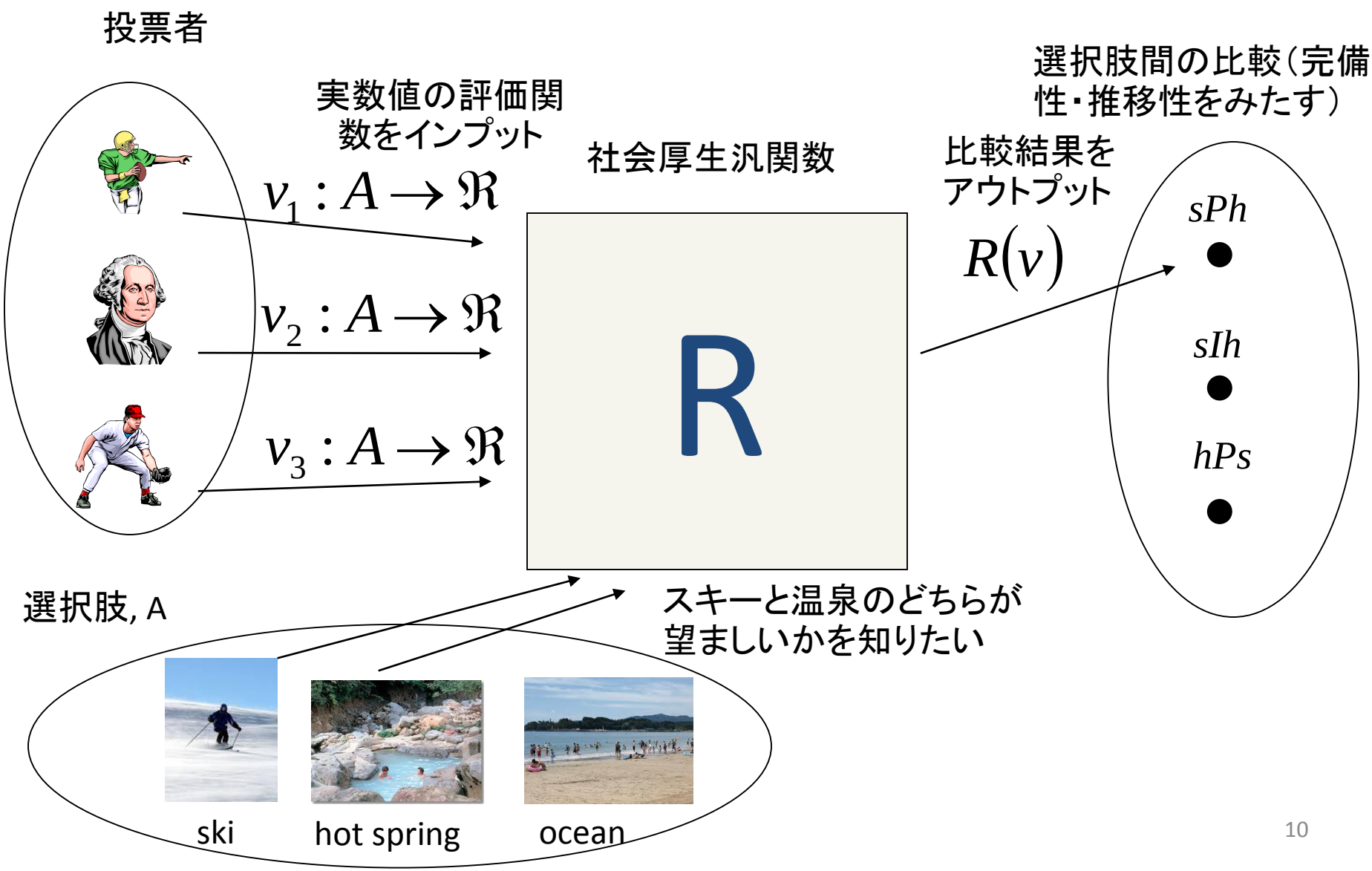
例：

1. 「Y先生の100点と70点との点差」は「M先生の80点と65点との点差」よりも大きい。
2. 「M先生の65点という評価」は「Y先生の70点という評価」よりも低い。

社会厚生関数


投票者
選好をインプット
$\succsim_1$
$\succsim_2$
$\succsim_3$
社会厚生関数
R
比較結果をアウトプット
$R(\succsim)$
選択肢間の比較（完備性・推移性をみたす）
sPh
sIh
hPs
選択肢, A
スキーと温泉のどちらが望ましいかを知りたい
ski
hot spring
ocean

社会厚生汎関数


投票者
実数値の評価関数をインプット
$v_1 : A \to \Re$
$v_2 : A \to \Re$
$v_3 : A \to \Re$
社会厚生汎関数
R
比較結果をアウトプット
$R(v)$
選択肢間の比較（完備性・推移性をみたす）
sPh
sIh
hPs
選択肢, A
スキーと温泉のどちらが望ましいかを知りたい
ski
hot spring
ocean

社会厚生汎関数の例 (1/5)

- 独裁ルール（投票者iが独裁者）, R_{D_i}

社会厚生汎関数の例 (2/5)

- 功利主義ルール, R_U

社会厚生汎関数の例 (3/5)

- ナッシュ・ルール, R_N
  （各i∈Nについて $v_i : A \to \Re_{++}$ を仮定）

社会厚生汎関数の例(4/5)

- レキシミン・ルール, $R_{L\min}$
- $\theta : \Re^n \to \Re^n$: n次元ベクトル $(v_1, \ldots, v_n)$ を小さい順に並べ替える写像

（たとえば $v = (3,4,2,3,2)$ ならば $\theta(v) = (2,2,3,3,4)$ ）

- 各選択肢 $x, y \in A$ に対して,

$$xR_{L\min}(v)y \Leftrightarrow \left\{ \right.$$

社会厚生汎関数の例(5/5)

- レキシマックス・ルール, $R_{L\max}$
- $\theta : \Re^n \to \Re^n$: n次元ベクトル $(v_1, \ldots, v_n)$ を小さい順に並べ替える写像

（たとえば$v = (3,4,2,3,2)$ ならば $\theta(v) = (2,2,3,3,4)$ ）

- 各選択肢 $x, y \in A$ に対して,

$$xR_{L\max}(v)y \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_n(v(x)) > \theta_n(v(y)) \\ \theta_n(v(x)) = \theta_n(v(y)) \text{かつ} \theta_{n-1}(v(x)) > \theta_{n-1}(v(y)) \\ \quad \text{（略）} \\ \theta_n(v(x)) = \theta_n(v(y)) \ldots, \theta_1(v(x)) \geq \theta_1(v(y)) \end{cases}$$

評価関数の情報的基礎

- 各投票者の評価関数 $v_i : A \to \Re$ はどのような情報を有しているのか？
- $v_i(x) > v_i(y)$ より,

①

ということはわかる。

①序数的比較不可能性

- Φ:強単調な実数値関数の全体
- 評価関数が①に関する情報のみを有しているのであれば,

$\because$ 任意の$(v_1,\ldots,v_n)$,任意の$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \Phi$について

①序数的比較不可能性

- したがって，評価関数が序数的比較不可能なとき，任意の$(v_1,\ldots,v_n)$ と任意の$(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\in\Phi^N\equiv\prod_{i\in N}\Phi$ に対して，

が成り立つ。

（　　）

①序数的比較不可能性

例：功利主義ルールR_UはΦ^Nに関する情報不変性をみたさない。

∵N={1,2}, A={x,y},$(v_1(x), v_1(y)) = (1,3), (v_2(x), v_2(y)) = (6,3)$とおく。$(\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^N$として$\varphi_1(u) = u^3, \varphi_2(u) = u$をとる。このとき$xP_U(v_1, v_2)y$であるが,$(\varphi_1(v_1(x)), \varphi_1(v_1(y))) = (1,27)$であるため，$yP_U(\varphi_1 \circ v_1, \varphi_2 \circ v_2)x$がなりたつ。

①序数的比較不可能性

例：レキシミン・ルール$R_{L\min}$は Φ^N に関する情報不変性をみたさない。

∵N={1,2}, A={x,y},$(v_1(x), v_1(y)) = (1,3), (v_2(x), v_2(y)) = (6,3)$

とおく。$(\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^N$ として $\varphi_1(u) = u + 10, \varphi_2(u) = u$ をとる。

このとき $yP_{L\min}(v_1, v_2)x$ であるが,

$(\varphi_1(v_1(x)), \varphi_1(v_1(y))) = (11,13)$ であるため,

$xP_{L\min}(\varphi_1 \circ v_1, \varphi_2 \circ v_2)y$ がなりたつ。

評価関数の情報的基礎の表現

- 評価関数が①以外の情報を有している

⇒ある正単調変換によって評価関数が有する情報が歪められる可能性が生じる

⇒情報を歪めないような変換の集合が Φ^N の部分群となっている。

- 逆に，許容される変換の集合 $\Psi \subset \Phi^N$ を通じて，評価関数がいかなる情報を有しているのかを記述することが可能

② 序数的評価水準比較可能性

- $\Phi^{OLC} \equiv$
- Φ^{OLC} に関する情報不変性:

  $\forall \varphi \in \Phi^{OLC},\ \forall v,\ \ R(v) = R(\varphi \circ v)$

- 任意の $(\varphi, \ldots, \varphi) \in \Phi^{OLC}$, 任意の $(v_1, \ldots, v_n)$ について

  なので,

  Φ^{OLC} に関する情報不変性下においては,

②

  という情報が利用可能

② 全員的比較不可能性

- $\Phi^{CNC} \equiv \left\{ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \Phi^N \mid \forall i \in N, \exists \alpha_i > 0, \beta_i \in \Re, \varphi_i(u) = \alpha_i u + \beta_i \right\}$
- Φ^{CNC} に関する情報不変性: $\forall \varphi \in \Phi^{CNC}, \forall v, R(v) = R(\varphi \circ v)$
- 任意の $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \Phi^{CNC}$, 任意の $(v_1, \ldots, v_n)$ について

なので,

∵

Φ^{CNC} に関する情報不変性下においては,

③

という情報が利用可能

④ 基数的評価差比較可能性

- $\Phi^{CDC} \equiv$
- Φ^{CDC}に関する情報不変性:$\forall \varphi \in \Phi^{CDC}, \forall v, R(v) = R(\varphi \circ v)$
- 任意の$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \Phi^{CNC}$, 任意の$(v_1, \ldots, v_n)$について

なので,

∵

Φ^{CDC}に関する情報不変性下においては,

④

という情報が利用可能

⑤ 基数的完全比較可能性

- $\Phi^{CFC} \equiv$
- Φ^{CFC} に関する情報不変性: $\forall \varphi \in \Phi^{CFC}\ \forall v, R(v) = R(\varphi \circ v)$
- Φ^{CFC} に関する情報不変性下においては,
  - $\Phi^{CFC} \subseteq \Phi^{OLC} \Rightarrow$ ②に関する情報が利用可能
  - $\Phi^{CFC} \subseteq \Phi^{CNC} \Rightarrow$ ③に関する情報が利用可能
  - $\Phi^{CFC} \subseteq \Phi^{CDC} \Rightarrow$ ④に関する情報が利用可能

公理の充足

	Φ^{N}	Φ^{OLC}	Φ^{CNC}	Φ^{CDC}	Φ^{CFC}
功利主義	×	×	×	○	○
レキシミン	×	○	×	×	○

功利主義とレキシミンの特徴づけ

1. 定義域の非限定性 (UD: Unrestricted Domain)

・・・あらゆる状況において，入力された各投票者の評価関数に基づいて選択肢間の望ましさを比較することができる。

功利主義とレキシミンの特徴づけ

2. 強パレート原理 (SPP: Strong Pareto Principle)

・・・投票者全員の評価が一致した際には，その評価は集計結果に反映される。

功利主義とレキシミンの特徴づけ

3. 無関連対象からの独立性 (IIA: Independence of Irrelevant Alternatives):

・・・2選択肢x,y間の社会的評価は，各投票者のx,yに対する評価のみに応じて決定される。

功利主義とレキシミンの特徴づけ

4. 匿名性 (AN: Anonymity)

・・・投票者の名前に依存した集計は行われない。

功利主義とレキシミンの特徴づけ

5. 最小限の衡平性 (ME: Minimal Equity)

ある評価組 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$と

ある投票者 $i, j \in N$, ある選択肢 $x, y \in N$ について,

$$v_i(y) < v_i(x) < v_j(x) < v_j(y), \quad v_k(x) = v_k(y), \forall k \in N \setminus \{i, j\}$$

かつ $xP(v)y$ が成り立つ。

・・・より評価の低い投票者の意向が尊重されるケースが少なくとも一つは存在する。

功利主義とレキシミンの特徴づけ

1. $\#A \geq 3$ のとき，「定義域の非限定性」「強パレート原理」「無関連対象からの独立性」「匿名性」「Φ^{CDC}に関する情報不変性」をみたす社会厚生汎関数は功利主義ルールのみである。
2. $\#A \geq 3$のとき，「定義域の非限定性」「強パレート原理」「無関連対象からの独立性」「匿名性」「最小限の衡平性」「Φ^{OLC}に関する情報不変性」をみたす社会厚生汎関数はレキシミン・ルールのみである。

補題:厚生主義定理

- 厚生主義(Welfarism)
  - 選択肢間の望ましさは，投票者の選択肢への評価のみに従って比較される。

⇔

- 厚生主義定理

$\#A \geq 3$のとき，「強パレート原理」及び「無関連対象からの独立性」をみたす社会厚生汎関数は厚生主義的である。

功利主義の特徴づけ (1/2)

- 簡単化のため，#N=2のケースを考える

【Step 1】$\sum_{i \in N} v_i(x) = \sum_{i \in N} v_i(y)$ならば$xI(v)y$

【Step 1】の証明: $(v_1(x), v_1(y)) = (u, u')$,

$(v_2(x), v_2(y)) = (u'+h, u+h)$ とおく。

$(v'_2(x), v'_2(y)) = (u', u)$ のとき，匿名性より $xI(v_1, v'_2)y$

ここで $\varphi(u) = u + h$に対して, $v_2 = \varphi \circ v'_2$ なので,

Φ^{CDC} に関する情報不変性より $R(v_1, v'_2) = R(v_1, v_2)$ 。

したがって, $xI(v_1, v_2)y$ ■

功利主義の特徴づけ (2/2)

【Step 2】$\sum_{i \in N} v_i(x) > \sum_{i \in N} v_i(y)$ ならば $xP(v)y$

【Step 2】の証明: $\sum_{i \in N} v_i(x) - \sum_{i \in N} v_i(y) = \delta > 0$ とおく。

$v_1(z) = v_1(y) + \delta/2,\ v_2(z) = v_2(y) + \delta/2$ のとき,

強パレート原理より $zP(v)y$,

$\sum_{i \in N} v_i(x) = \sum_{i \in N} v_i(z)$ より $xI(v)z$ なので,

$R(v)$ の推移性より $xP(v)y$ を得る。

このときIIAより, zの評価に関わらず,

$\sum_{i \in N} v_i(x) > \sum_{i \in N} v_i(y)$ ならば $xP(v)y$を得る。■

レキシミンの特徴づけ (1/4)

【Step 1】$v_1(y) < v_1(x) < v_2(x) < v_2(y)$ ならば $xP(v)y$

【Step 1】の証明：RはANをみたし，かつ厚生主義的なので，MEよりある (v'_1, v'_2)について，

$v'_1(y) < v'_1(x) < v'_2(x) < v'_2(y)$かつ $xP(v'_1, v'_2)y$

が成立。単調増加関数 φとして，$\varphi(v'_1(y)) = v_1(y)$,

$\varphi(v'_1(x)) = v_1(y)$, $\varphi(v'_2(x)) = v_2(x)$, $\varphi(v'_2(y)) = v_2(y)$

をみたすものをとる。このとき Φ^{OLC} に関する情報不変性より $R(v'_1, v'_2) = R(\varphi \circ v'_1, \varphi \circ v'_2) = R(v_1, v_2)$

が成立。よってIIAより $xP(v)y$ 。■

レキシミンの特徴づけ (2/4)

【Step 2】$\min\{v_1(x), v_2(x)\} > \min\{v_1(y), v_2(y)\}$ならば $xP(v)y$

【Step 2】の証明：匿名性より，一般性を失うことなく $v_1(y) \le v_2(y)$ を仮定する。また，強パレート原理が適用できない状況（$v_1(y) < v_1(x),\ v_2(x) < v_2(y)$）を考える。このとき仮定より $v_1(y) < v_2(x)$ が成立。

(Case 1) $v_1(y) < v_1(x) < v_2(x)$ のとき：$v_2(x) < v_2(y)$より，

$v_1(y) < v_1(x) < v_2(x) < v_2(y)$ となり，【Step 1】より

$xP(v)y$ がいえる。

レキシミンの特徴づけ (3/4)

(Case 2) $v_1(y) < v_2(x) \leq v_1(x)$のとき: zに対する評価が

$v_1(y) < v_1(z) < v_2(x) \leq v_1(x),\ v_2(z) = v_2(x) < v_2(y)$

であるとしよう。このとき,

$v_1(y) < v_1(z) < v_2(z) < v_2(y)$より$zP(v)y$

$v_1(z) < v_1(x)$, $v_2(z) = v_2(x)$より$xP(v)z$

なので,$R(v)$の推移性より $xP(v)y$ が成り立つ。

今 R はIIAをみたしているので, zに対する評価に関わらず $xP(v)y$ となる。■

レキシミンの特徴づけ (4/4)

【Step 3】$\min\{v_1(x), v_2(x)\} = \min\{v_1(y), v_2(y)\}$かつ

$\max\{v_1(x), v_2(x)\} > \max\{v_1(y), v_2(y)\}$ ならば $xP(v)y$

【Step 3】の証明：強パレート原理が適用できない状況（$v_1(y) < v_1(x),\ v_2(x) < v_2(y)$）を考える。このとき仮定より

$v_1(y) = v_2(x)$，$v_1(x) > v_2(y)$が成り立つ。Zに対する評価が $v_1(z) = v_2(y), v_2(z) = v_1(y)$ のとき，

Rが匿名的，厚生主義的であるため，$yI(v)z$

$v_1(x) > v_2(y) = v_1(z), v_2(z) = v_1(y) = v_2(x)$なので $xP(v)z$。したがって$xP(v)y$ 。IIAよりzの評価によらず$xP(v)y$ ■