現代経済の諸問題
V 中位投票者定理

山邑紘史
(mamura1623 at yahoo.co.jp)

投票のパラドクス

- 多数決ゲームにおける勝利提携, Ω

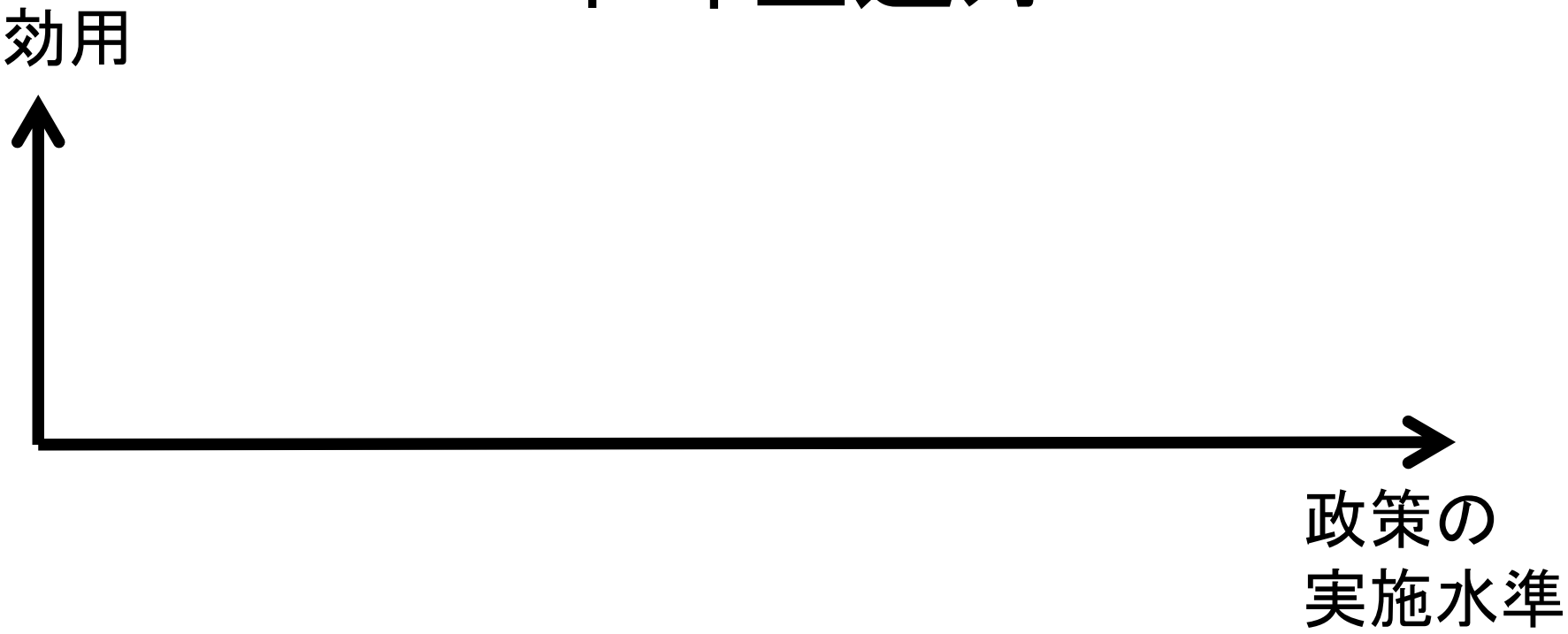
$$\Omega =$$

- 多数決ルールにおけるコア, $C(G)$

$$C(G) =$$

- 投票のパラドクス
  - 多数決ルールにおける中村ナンバーは なので, のときに投票ゲームのコアは空集合になりうる。

単峰型選好



- 政策の実施水準について，理想点（p_1，p_2，p_3）により近い方が望ましい，という選好

単峰型選好

- 選択肢の集合, $A \subseteq \Re$
- A 上の選好 $\succsim$ が単峰型選好である

$\Leftrightarrow$

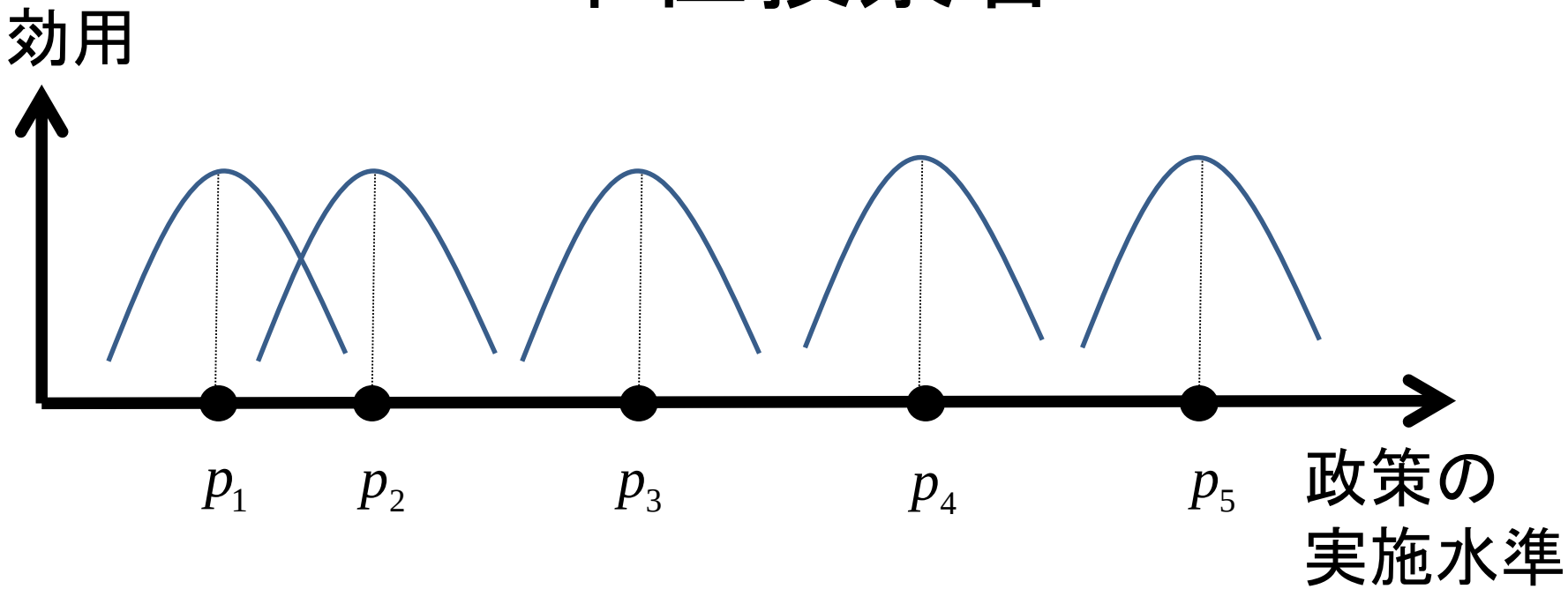
単峰型選好の例

1. 消費税の税率
2. 公共事業への政府支出額
3. 隣国に対する外交政策
4. 衆議院における自民党の議席数

バッファープレイヤー（蒲島, 1988）

– 自民党が与党であることを望みつつ，自民党の勝ち過ぎを回避しようとする投票者

中位投票者



- 投票者が奇数人で，各投票者が理想点が p_i の単峰型選好を有している。このとき，
  投票者iが中位投票者 ⇔

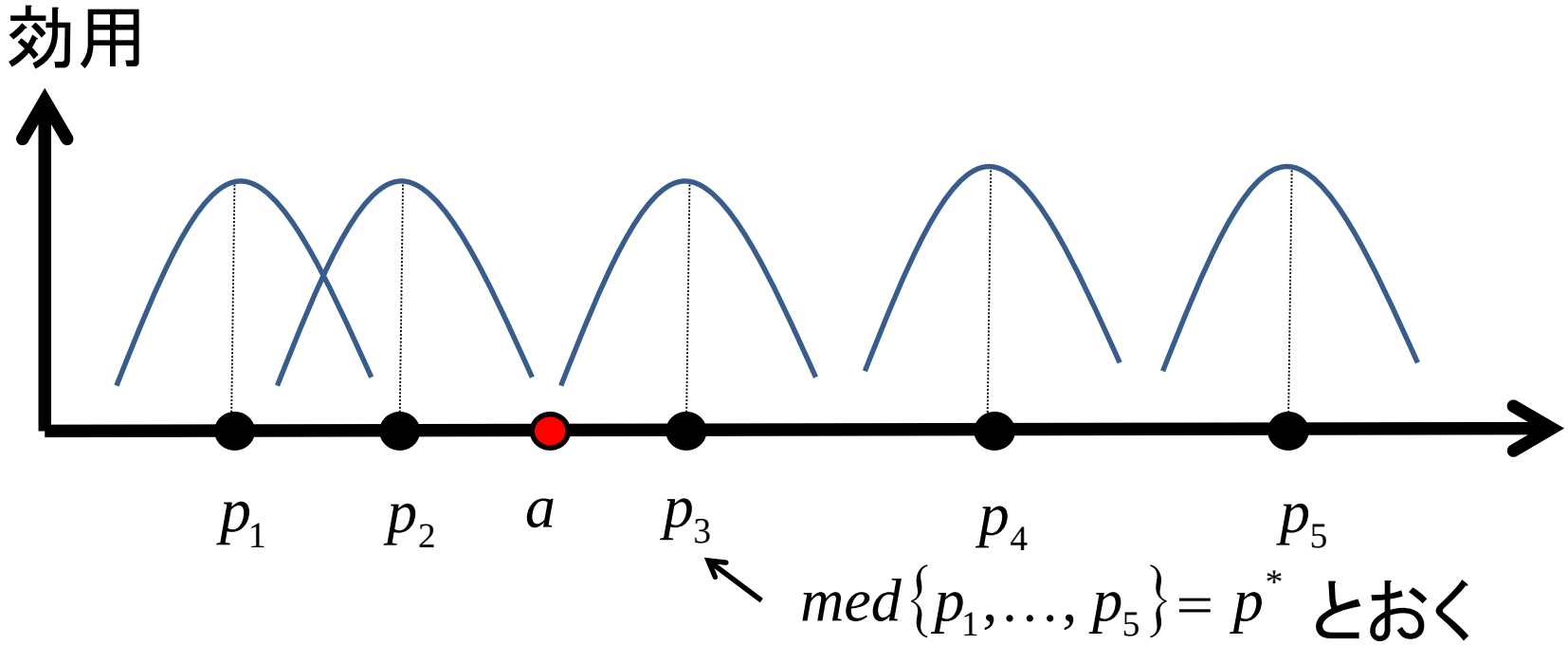
中位投票者定理

- $A \subseteq \Re$ とし，すべての投票者が単峰型選好を有し，その理想点が p_i であるとしよう。

1. $\#N$ が奇数のとき，多数決投票ルールのコアは

2. $\#N$ が偶数のとき，多数決投票ルールのコアは

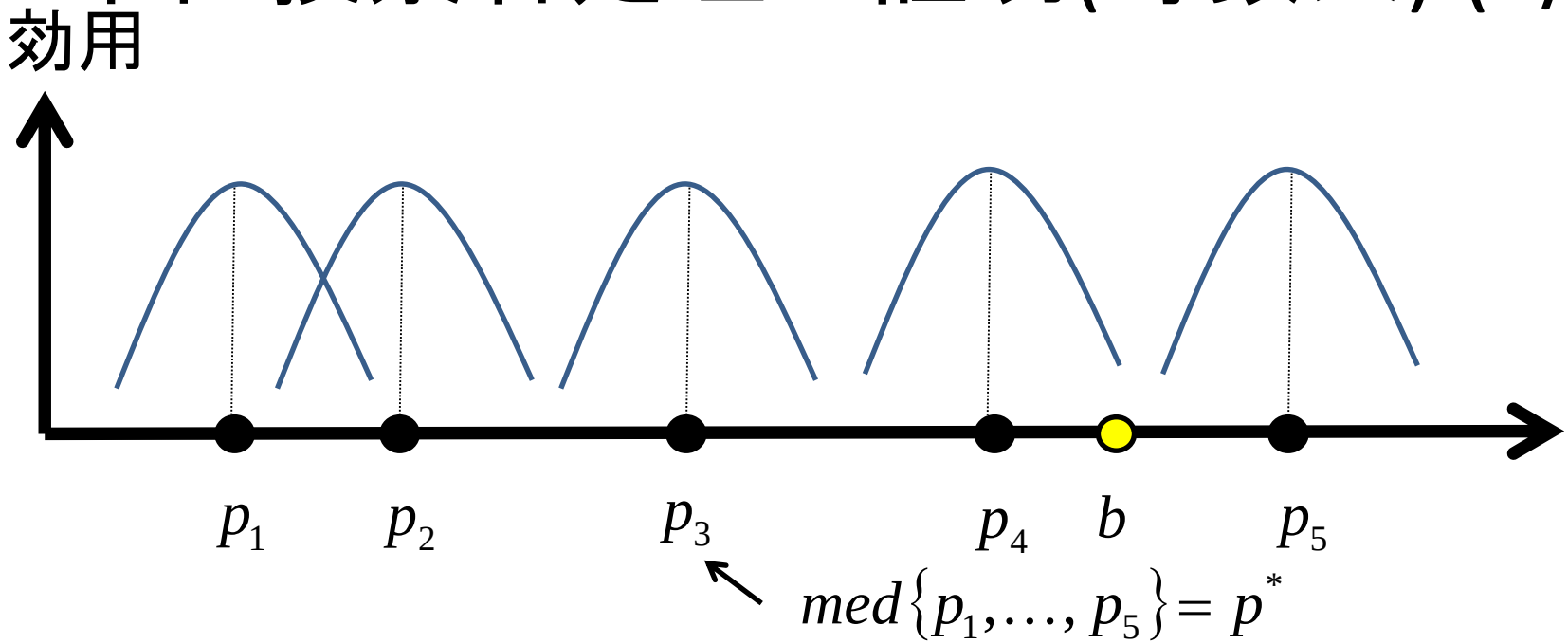
中位投票者定理の証明(奇数人) (1/3)



- 任意の $a < med\{p_1,\ldots,p_n\}$ に対して

なので, で, かつ ではない。

中位投票者定理の証明(奇数人) (2/3)



- 任意の $b > med\{p_1,\ldots,p_n\}$ に対して

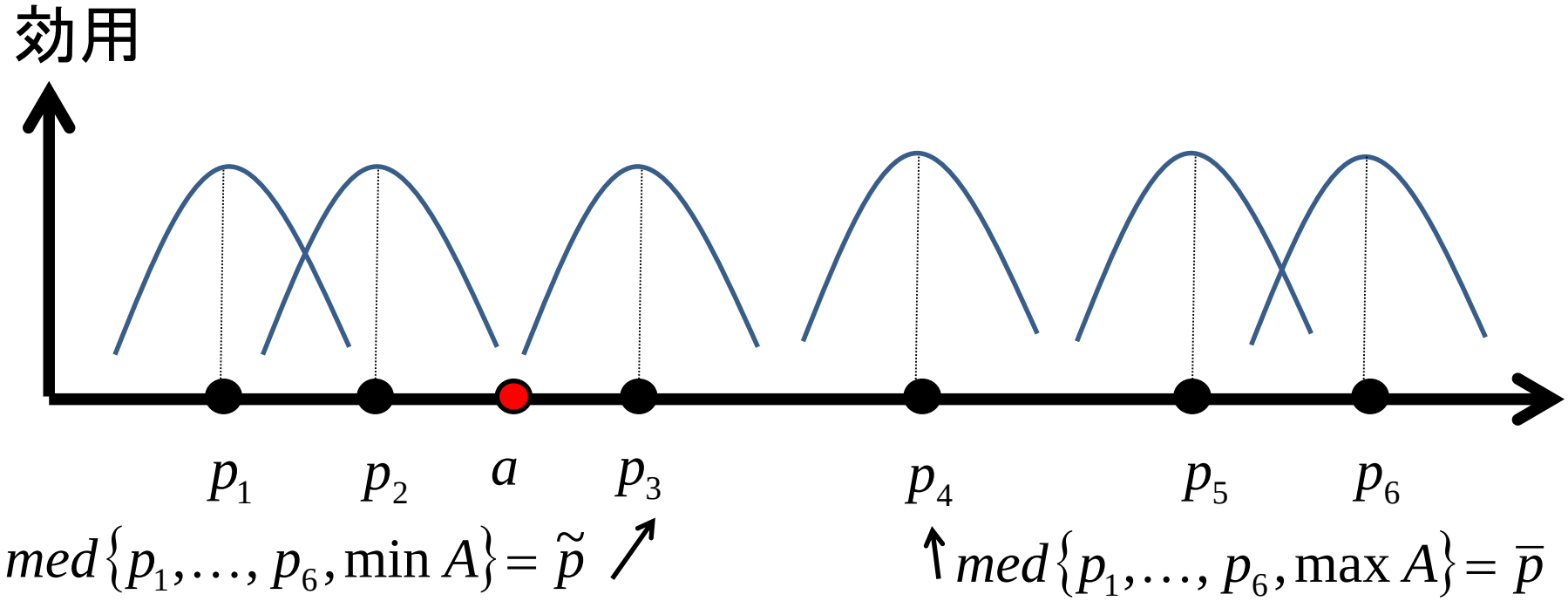
なので, で, かつ ではない。

中位投票者定理の証明(奇数人) (3/3)

- 8,9ページの議論より,
  1. 任意の $x \neq p^*$ について $p^* P x$
  2. $x P p^*$ となるような $x \in A$ は存在しない

$\Rightarrow$ $C(G) = \{p^*\}$ $(p^* = med\{p_1, \ldots, p_5\})$ ■

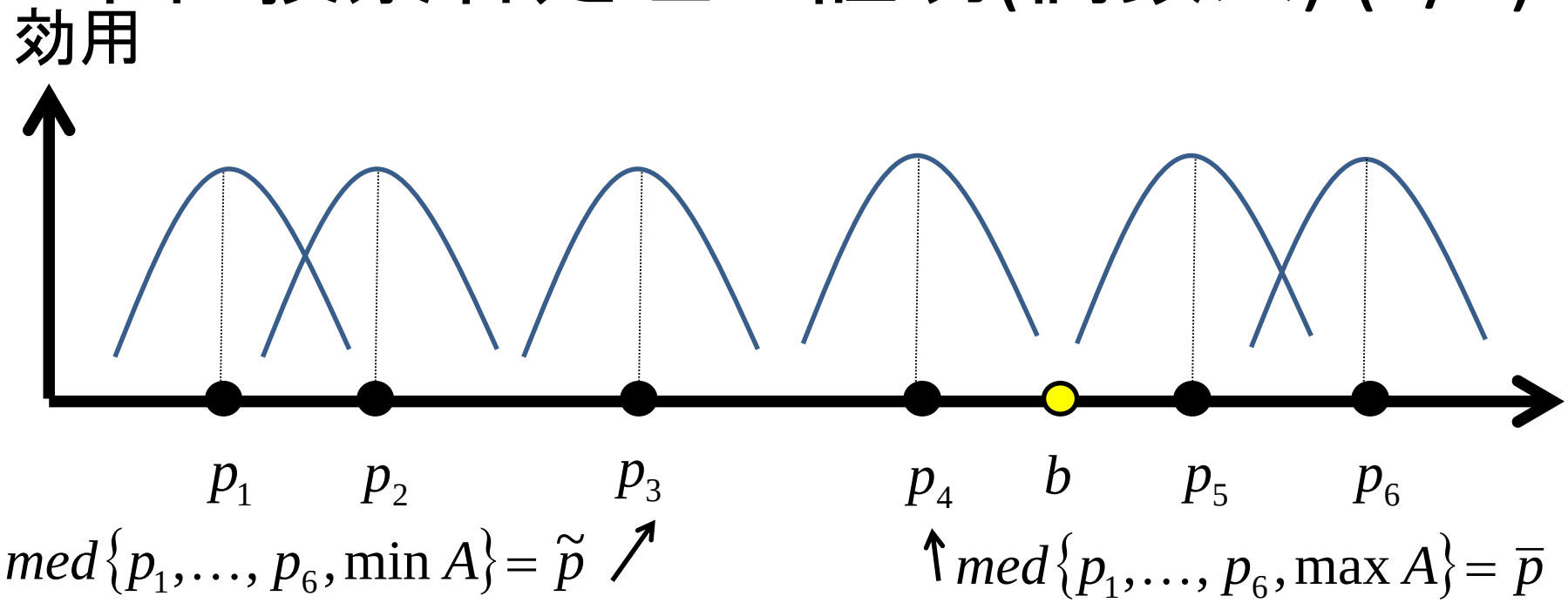
中位投票者定理の証明(偶数人) (1/4)



- 任意の $a<\tilde{p}$ に対して

なので, で, かつ ではない。

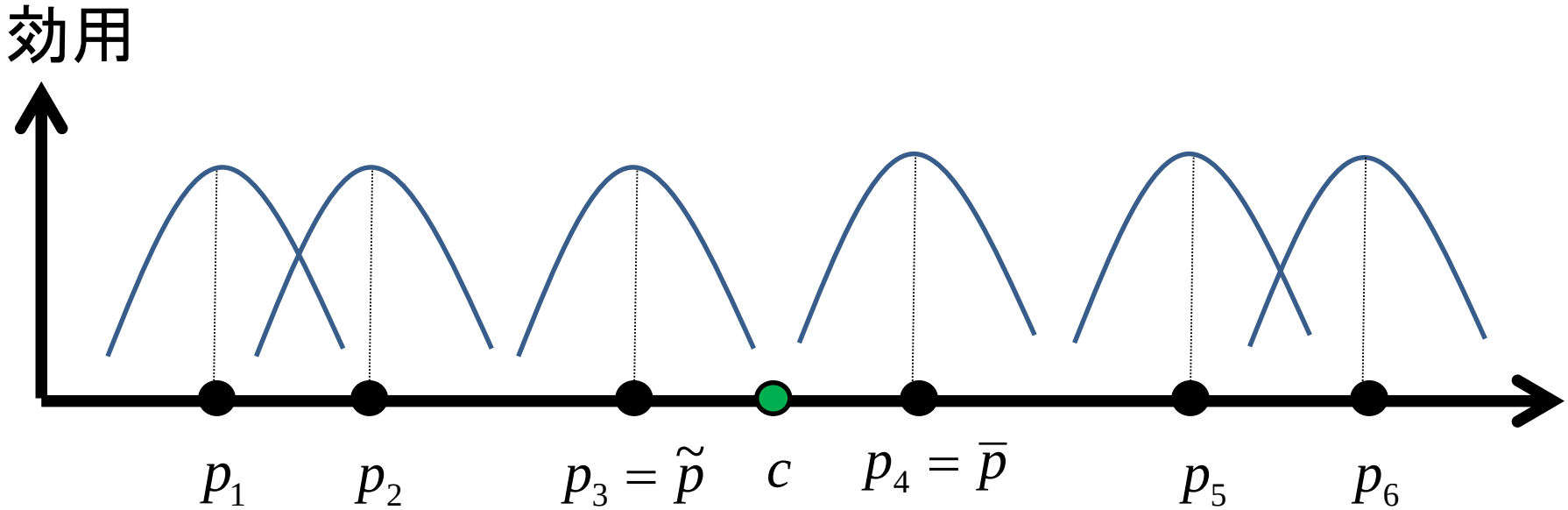
中位投票者定理の証明(偶数人) (2/4)



- 任意の $b>\tilde{p}$ に対して

なので, で, かつ ではない。

中位投票者定理の証明(偶数人) (3/4)



- 任意の $c \in [\tilde{p}, \bar{p}]$ について
  - $x < c$ ならば
  - $x > c$ ならば

なので, である。

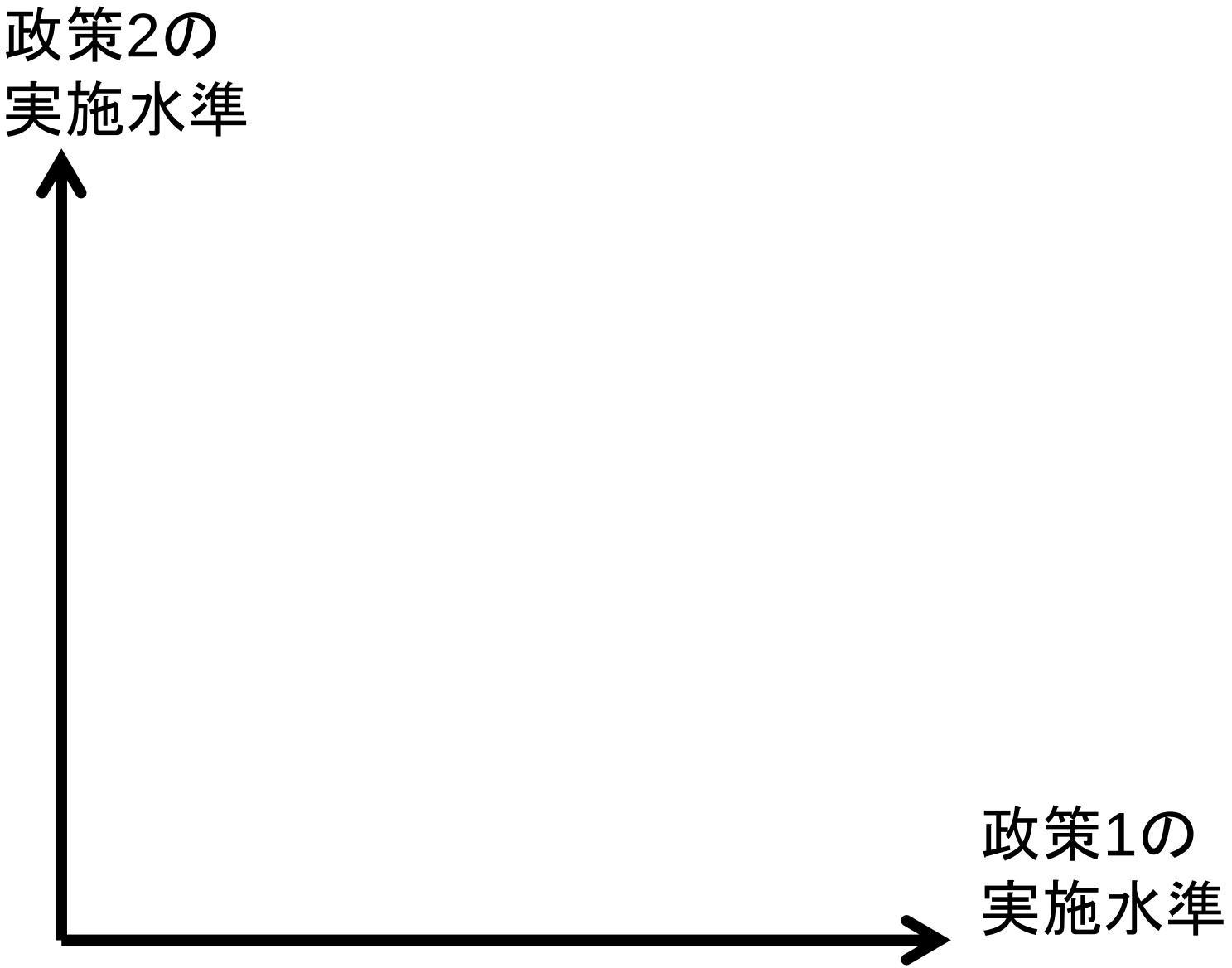
中位投票者定理の証明(偶数人) (4/4)

11-13ページの議論より,

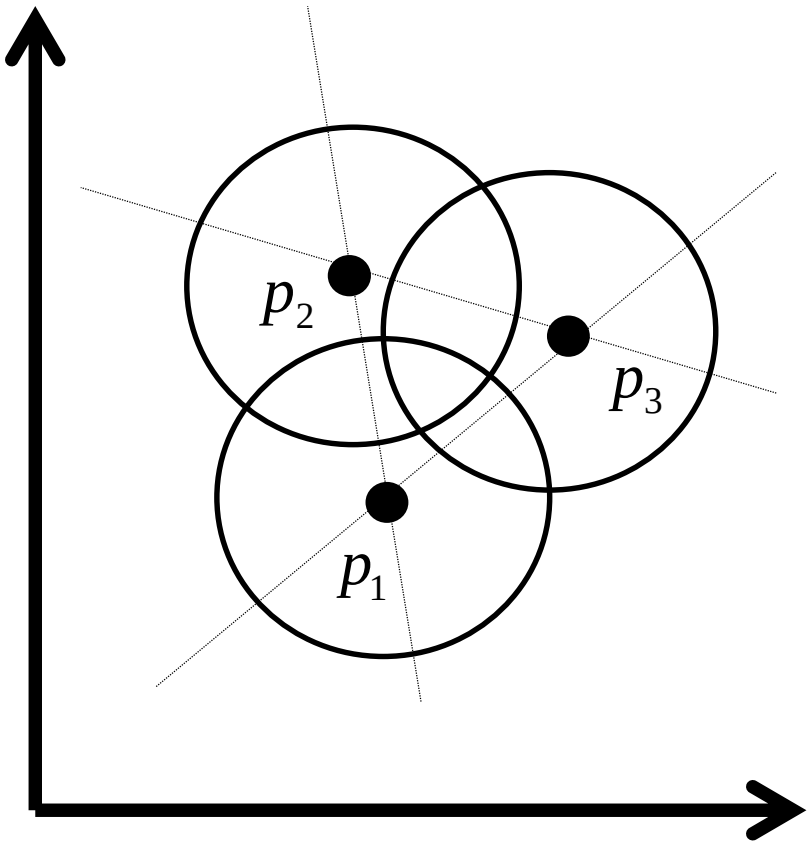
1. 任意の $x < \tilde{p}$ について $\tilde{p}Px$
2. 任意の $x > \bar{p}$ について $\bar{p}Px$
3. $\tilde{p} \le x \le \bar{p}$ ならば $x \in C(G)$

$\Rightarrow$ $C(G) = \{x \in A : \tilde{p} \le x \le \bar{p}\}$ ■

選択肢の集合が多次元の場合



選択肢の集合が多次元の場合

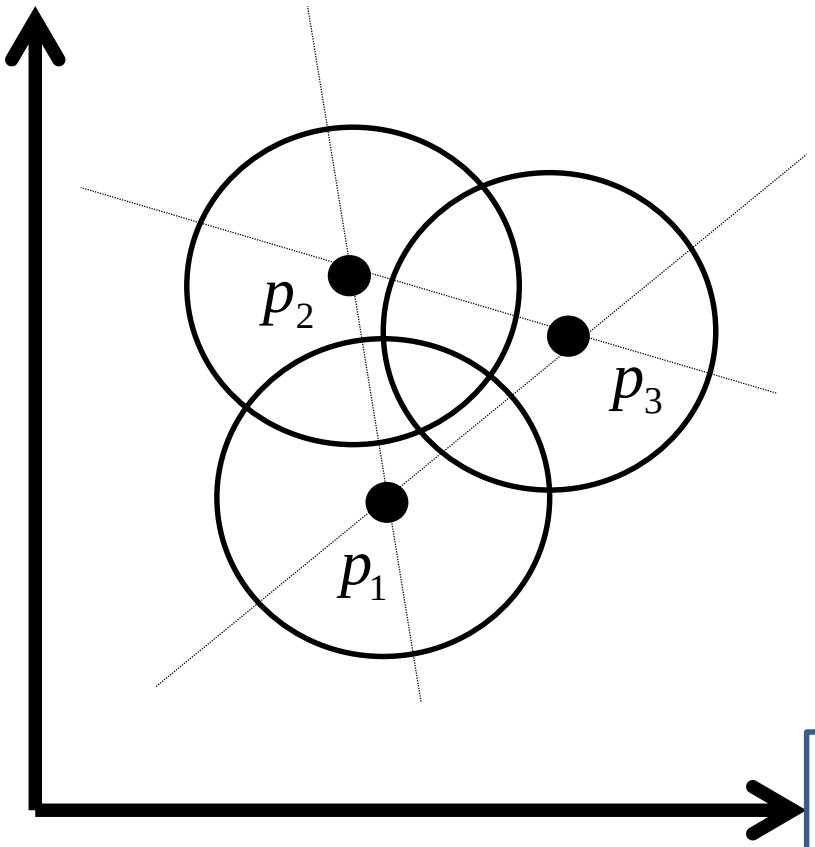


- $N = \{1,2,3\}$, $A = \Re^2$,

  $x \succsim_i y \Leftrightarrow \|x - p_i\| \le \|y - p_i\|$

  (ただし p_1, p_2, p_3 は同一直線上にない)とする。
- このとき，多数決投票ルールのコアは空集合となる。

選択肢の集合が多次元の場合



- 直線 p_1p_3 外から任意に選択肢xを取る。
- xから直線 p_1p_3に垂線を引き，交点をyとする。
- このとき，

⇒xが多数決投票ルールのコアに属するならば，

(1)

選択肢の集合が多次元の場合

- 同様にして，選択肢xがコアに属しているならば，

(2)

(3)

ことが示せるが，(1),(2),(3)の全ての条件をみたすような選択肢は存在しない。■