現代経済の諸問題
Ⅲ 投票ゲームのコアと中村ナンバー

山邑紘史
(yamamura-h@soc.titech.ac.jp)

多数決ルールにおける勝利提携

- 多数決ルール, R_M

$\Rightarrow$ をみたす任意の $S \subseteq N$ について,

がなりたつ。

多数決ルールにおける勝利提携

- したがって多数決ルールの下では,

⇒ このような, 提携 S を と呼ぶ

多数決ルールにおける勝利提携の全体: Ω

勝利提携の例

- 多数決ルール（$N = \{1,2,3\}$ のとき）

$\Omega =$

- 国会（衆議院議員の集合を R, 参議院議員の集合を C とする。$N = R \cup C$）

1. 法案の議決

$\Omega =$

2. 首相の指名・予算案の議決

$\Omega =$

3. 改憲案の議決

$\Omega =$

勝利提携の例

- 株主総会（保有株式が $m_1, m_2, \ldots, m_n$ のとき）

$$\Omega = \boxed{}$$

- 国連安全保障理事会（安保理）
  - 常任理事国5カ国と非常任理事国10カ国
  - 9カ国以上の賛成で議案は採決される。
  - ただし全ての常任理事国は採決に対する拒否権をもつ

  ⇒議案の採決には，全ての常任理事国を含む9カ国以上の賛成が必要

宿題：安保理における勝利提携全体を記述しなさい。

勝利提携 Ω の特徴

1. 全会一致性
   -
   - 投票者全員の意見の一致は尊重される
2. 単調性
   -
   - 勝利提携を含むような提携は，やはり勝利提携である
3. 本質性
   -
   - 互いに素な二つの勝利提携が並び立つことはない

投票ゲーム

- 投票の状況 $\left\{N, A, \left(\succsim_1 \succsim_2 \cdots \succsim_n\right)\right\}$, 及び，勝利提携の全体 Ω が定まっているとき，

を　　という。

- 投票ゲームの分析を通じて，いかなる選択肢が選ばれうるかを知りたい

⇒協力ゲーム理論における　　の概念を利用

投票ゲームのコア：定義

- 投票ゲーム $G = \{N, A, (\succsim_1 \succsim_2 \ldots \succsim_n), \Omega\}$ において，

選択肢 y が提携 S を通じて選択肢 x に支配される

⇔ $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$

⇔ と表記する。

- :

投票ゲームのコア：定義

- 投票ゲーム G のコア：

- 選択肢 x が投票ゲーム G のコアに属する

$\Leftrightarrow$

投票ゲームのコア：例1

例1： $N = \{1,2,3\}$ $A = \{x, y, z\}$

$\Omega = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$

$\succsim_1 : x \succ_1 y \succ_1 z$ $\succsim_2 : y \succ_2 z \succ_2 x$ $\succsim_3 : z \succ_3 x \succ_3 y$

このとき，

- なので
- なので
- なので

多数決投票ゲームのコアは

⇒

投票ゲームのコア：例2

例2： $N = \{1,2,3,4\}$ $A = \{x, y, z\}$

$$\Omega = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

命題：例2においては，任意の選好組の下で投票ゲームのコアは非空になる。

証明：仮に投票ゲームのコアが空だとすると，一般性を失うことなく，以下のことが成立。

$$\begin{cases} xPy \Rightarrow \\ yPz \Rightarrow \\ zPx \Rightarrow \end{cases}$$

投票ゲームのコア：例2

- Ωに対する仮定より，任意の$S_1, S_2, S_3 \in \Omega$について

が成り立つ。

$\Rightarrow$ が言えるため，

ことの矛盾が生じる。■

投票ゲームのコア：例3

例3： $N = \{1,2,3,4\}$ $A = \{x, y, z, w\}$

$$\Omega = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

$\succsim_1 : x \succ_1 y \succ_1 z \succ_1 w$ $\quad$ $\succsim_2 : y \succ_2 z \succ_2 w \succ_2 x$

$\succsim_3 : z \succ_3 w \succ_3 x \succ_3 y$ $\quad$ $\succsim_4 : w \succ_4 x \succ_4 y \succ_4 z$

宿題：例3において，投票ゲームのコアが空集合となることを示しなさい。

直観：投票ゲームのコアの非空性に関して，

拒否権プレイヤー

- 勝利提携全体 Ω の下，投票者 i が拒否権プレイヤー

⇔

- Ω の下で拒否権プレイヤーが存在する

⇔

- 例1～例3においては拒否権プレイヤーは

拒否権プレイヤーとコア

命題：選択肢が有限で，かつ拒否権プレイヤーが存在するとき，任意の選好組の下で投票ゲームのコアは非空になる。

証明：$i \in N$ を拒否権プレイヤーとする。任意の選好組 $(\succsim_1, \succsim_2, \ldots, \succsim_n)$ に対して，$T(\succsim_i)$ を

$T(\succsim_i) \equiv$

iが最も好む選択肢の集合

とおく。A の有限性より，である。

拒否権プレイヤーとコア

- $x \in T(\succsim_i)$ を取ると，任意の $y \in A$，任意の $S \in \Omega$ について，$\boxed{}$ なので，

  $\boxed{}$ は成立しない。

$\Leftrightarrow$ $\boxed{}$ ■

中村ナンバー

中村ナンバー，$N(\Omega)$: Ω の構造を表現する数

- $\Sigma_\Omega \equiv$ とおく。

- $N(\Omega) \equiv \begin{cases} \min_{\sigma \in \Sigma_\Omega} \# \sigma & if \ \bigcap_{S \in \sigma} S = \phi \\ \end{cases}$

中村の定理

- 勝利提携の組 Ω と選択肢の集合 A とが与えられた下，任意の選好組において投票ゲームのコアが非空となるための必要十分条件は，

がなりたつことである。

中村ナンバー：例1

例1： $N = \{1,2,3\}$

$\Omega = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$

このとき，

- 任意の $S_1, S_2 \in \Omega$ について
- $\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\} \in \Omega$ に対して

$\Rightarrow \quad N(\Omega) =$

中村ナンバー：例2, 例3

例2, 例3： $N = \{1,2,3,4\}$

$$\Omega = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

このとき,

- 任意の $S_1, S_2, S_3 \in \Omega$ について
-

$\Rightarrow \quad N(\Omega) =$

中村の定理の証明 (1/8)

【補題】もし投票ゲームのコアが空集合ならば，ある $\{a_1,\ldots,a_k\}\subseteq A$と $\{S_1,\ldots,S_k\}\subseteq\Omega$が存在して，

$$a_1 P^{S_k} a_k P^{S_{k-1}} a_{k-1} P^{S_{k-2}} \ldots P^{S_1} a_1$$ が成り立つ。

【補題】の証明：$\#A=n$ とする。コアが空だとすると，n+1個の選択肢 $a_1,\ldots,a_{n+1}$（重複可）とn個の勝利提携 $S_1,\ldots,S_n$ （重複可）が取れて，

$$a_{k+1} P^{S_k} a_k \text{ , for any } k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

がいえる。

中村の定理の証明(2/8)

このとき $\#A = n$ より，ある $j, k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $j < k$ が存在して，$a_j = a_k$ が成り立つ。

$k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ として，ある $j < k$ が存在して $a_j = a_k$ となるような最小の整数を取る。

$\Rightarrow$ $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{k-1}$ は互いに素で，かつ，

$$a_j = a_k P^{S_{k-1}} a_{k-1} P^{S_{k-2}} \ldots P^{S_j} a_j$$

が言える。■

中村の定理の証明(3/8)

【十分性】の証明：証明は背理法にも基づく。

$N(\Omega) > \# A$を仮定する。仮にある選好組の下で投票ゲームのコアが空になるとすると，【補題】より，ある$\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$と$\{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \Omega$とが存在して，

$$a_1 P^{S_k} a_k P^{S_{k-1}} a_{k-1} P^{S_{k-2}} \ldots P^{S_2} a_2 P^{S_1} a_1$$

がいえる。今，$k \leq \# A < N(G)$なので，

$$\bigcap_{S \in \{S_1, \ldots, S_k\}} S \neq \phi$$ が成立する。

中村の定理の証明(4/8)

ここで, $i \in \bigcap_{S \in \{S_1, \ldots, S_k\}} S$ について,

$$\begin{cases} a_2 P^{S_1} a_1,\ i \in S_1 & \Rightarrow\ a_2 \succ_i a_1 \\ a_3 P^{S_2} a_2,\ i \in S_2 & \Rightarrow\ a_3 \succ_i a_2 \\ \text{(省略)} & \\ a_1 P^{S_k} a_k,\ i \in S_k & \Rightarrow\ a_1 \succ_i a_k \end{cases}$$

となるため, $a_1 \succ a_k \succ_i \ldots a_2 \succ_i a_1$ が言え,

iの選好が推移性をみたしていることに矛盾■

中村の定理の証明(5/8)

【必要性】の証明 $m = N(\Omega) <= \# A$とおき,

$\{S_1, \ldots, S_m\} \in \Sigma_\Omega$ をみたす $\{S_1, \ldots, S_m\}$ をとる。このとき,

$\bigcup_{k=1}^{m} S_k^C = \left(\bigcap_{k=1}^{m} S_k \right)^C = N$ がなりたつ。ここで $\{T_1, \ldots, T_m\}$を

$T_1 = S_1^C, \quad T_k = S_k^C \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} S_j^C \quad k \in \{2, \ldots, m\}$とおくと,

1. 任意の$T_i, T_j \in \{T_1, \ldots, T_m\}, \ i \neq j$ について$T_i \cap T_j = \phi$
2. $\bigcup_{k=1}^{m} T_k = N$

がなりたつ。

中村の定理の証明(6/8)

- ここで選好組$\left(\succsim_1, \succsim_2, \ldots, \succsim_n\right)$を$\left\{a_1, \ldots, a_m\right\} \subseteq A$に関して
  - $i \in T_1 \Rightarrow a_2 \succ_i a_3 \succ_i \cdots \succ_i a_m \succ_i a_1$
  - $i \in T_2 \Rightarrow a_3 \succ_i a_4 \succ_i \cdots \succ_i a_m \succ_i a_1 \succ_i a_2$

  （省略）

  - $i \in T_m \Rightarrow a_1 \succ_i a_2 \succ_i \cdots \succ_i a_m$
  - 任意の$i \in N$, 任意の$a_k \in \left\{a_1, \ldots, a_m\right\}, a' \notin \left\{a_1, \ldots, a_m\right\}$ について$a_k \succ_i a'$

  をみたすように取る。

中村の定理の証明(7/8)

- このとき，任意の $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ について，
  - 任意の $i \in \bigcup_{\substack{k \in \{1,\ldots,m\} \\ k \neq j}} T_k$ について $a_j \succ_i a_{j+1}$

    （ここで $a_{m+1} = a_1$ とおく）
  - $\bigcup_{\substack{k \in \{1,\ldots,m\} \\ k \neq j}} T_j = N \setminus T_j \supset N \setminus S_j^C = S_j \in \Omega$

なので，$a_1 P a_2 P \cdots P a_m P a_1$ が成立。

中村の定理の証明(8/8)

- また，任意の $a' \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$について，明らかに $a_1 P a'$なので，これにより，投票ゲームのコアが空集合になっていることが確認された。■